ORSAY

n° 3307

T H E S E

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

Centre d'Orsay

pour obtenir

le grade de docteur de 3ème Cycle

Spécialité : Electronique

par

Marc ROUFF

Sujet : Propagation du son en présence du mode de real squashing dans le superfluide ^{3}He-B et mesure des ultra basses températures.

Soutenue le 14 Octobre 1982 devant la Commission d'examen.

MM. M. SAUZADE Président
G. BELLESSA
R. COMBESCOT
E. VAROQUAUX

UNIV.
LEIDEN
1638.

ORSAY

n° 3307

T H E S E

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

Centre d'Orsay

pour obtenir

le grade de docteur de 3ème Cycle

Spécialité : Electronique

par

Marc ROUFF

Sujet : Propagation du son en présence du mode de real squashing dans le superfluide ^{3}He-B et mesure des ultra basses températures.

Soutenue le 14 Octobre 1982 devant la Commission d'examen.

MM. M. SAUZADE Président

G. BELLESSA

R. COMBESCOT

E. VAROQUAUX

ABSTRACT

Ultrasonic studies in the B phase of superfluid ^{3}He have revealed the existence of non-linear phenomena in the coupling of zero sound to the real squashing mode. In august 1981, a theoretical model for these phenomena has been proposed by J. SAULS. The purpose of this work is to check its validity. This was done in two steps.

1°) Analytical and numerical calculation

The numerical study of the model has required a large volume of numerical calculation to simulate conditions close to the experimental ones.

2°) Comparison with the experimental results

After having summarized the available experimental results, I conclude that it is not possible to describe the observations with the help of solitons and, therefore, that the proposed phenomenological model is not valid. Hence the theory of the non-linear behaviour of sound in superfluid ^{3}He has yet to be devised. The experimental observations provide only a limited amount of information which is not sufficient to construct a new theory.

This thesis has four Chapter and five Appendices :

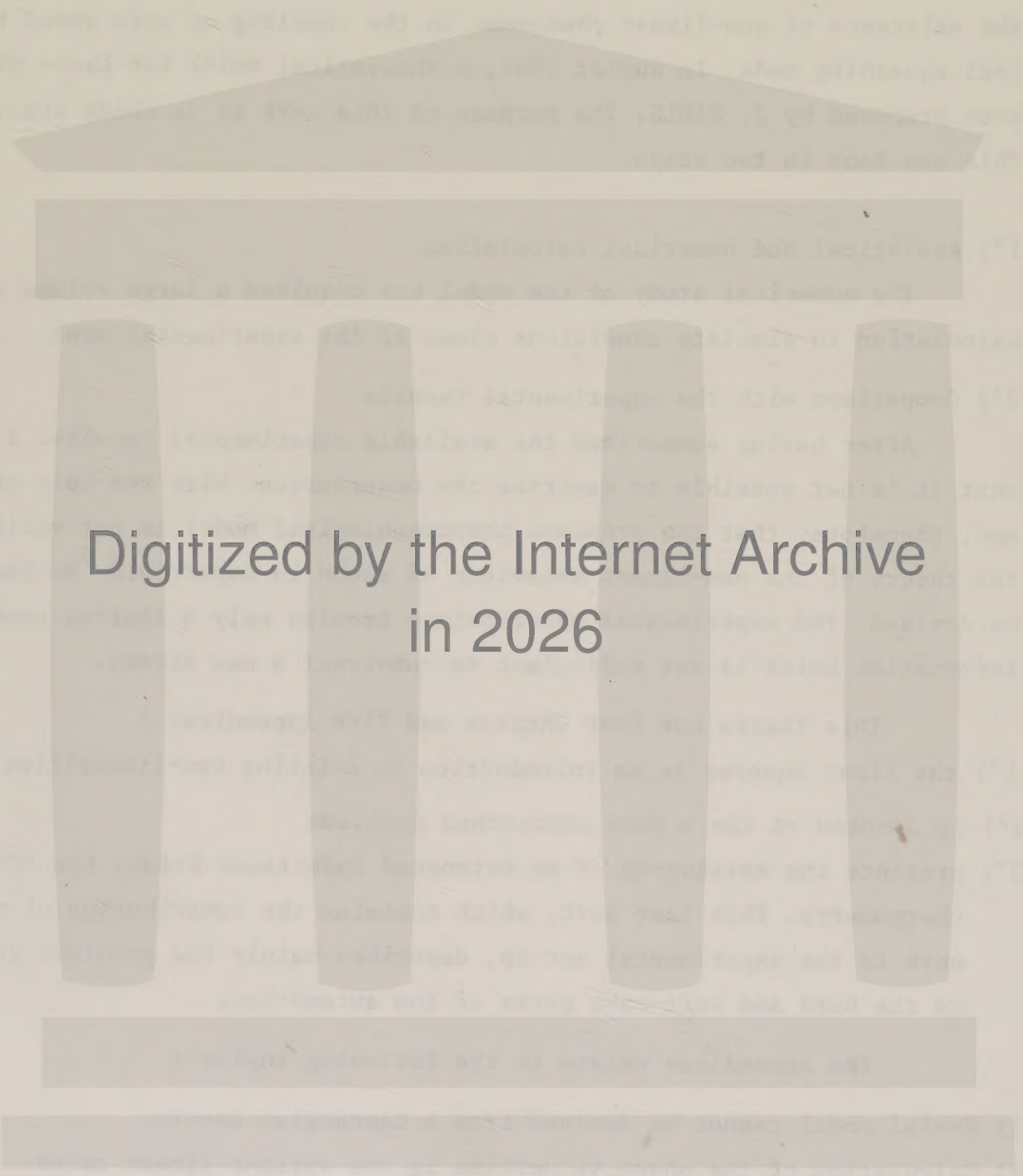
1°) the first chapter is an introduction to existing non-linearities

2°) is devoted to the a fore mentionned problems

3°) presents the setting-up of an automated inductance bridge for LCMN thermometry. This last part, which contains the contribution of this work to the experimental set-up, describes mainly the problems related to the hard and soft-ware parts of the automation.

The Appendices relate to the following topics :

1) Sauls' model cannot be derived from a Lagrangian dansity
2) Calculation of the phase velocities in the various linear cases
3) Gives a description of the algorithm which has been used to integrate the set of non-linear partial differential equations
4) Reprint of a paper published in the Review of Scientific Instruments on a specific interfacing problem met in the automated bridge
5) Description of the micro programs for the automated bridge processor


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547311_0002

REMERCIEMENTS

E. VAROQUAUX en m'accueillant dans son groupe a rendu cette thèse possible, je lui en suis particulièrement reconnaissant.

C. VIBET et C. SOL ont pendant plusieurs mois dirigé mes premières activités de recherche au laboratoire de robotique de l'E.N.S.E.T., et m'ont permis d'aller en physique des solides, je les en remercie.

Enfin, je tiens à remercier P. AYMARD et O. LANOUZIERE qui par leur collaboration technique ont aidé à l'aboutissement de ce travail.

AVANT-PROPOS

Cette thèse se divise en deux parties :

La première est consacrée à l'interprétation des résultats expérimentaux de propagation du son dans l'hélium - trois superfluide en phase B en présence du mode de "real squashing". Jusqu'ici un seul modèle phénoménologique a été proposé pour la propagation du son dans l'hélium - trois superfluide; il s'agit d'en étudier la validité pour la phase B du superfluide.

La seconde partie décrit la réalisation d'un dispositif de mesure automatique des ultra - basses températures par mesure de l'aimantation d'un sel paramagnétique dilué. Les problèmes rencontrés se sont centrés sur la réalisation de l'asservissement (gestion du calculateur et interfaçage) et représente ma contribution au dispositif expérimental.

Le plan de cette thèse est le suivant :

Première partie

I Introduction
II Etude analytique et numérique des équations non linéaires
III Comparaison avec l'expérience

Deuxième partie

IV Réalisation d'un dispositif thermométrique à LCMn.

CHAPITRE I

I1 Introduction

I11 L'hélium 3 : présentation du superfluide

I111 En phase B
I112 En phase A

I12 Phénomènes non-linéaires

I13 Problèmes expérimentaux liés à l'étude des non-linéarités

I131 Rappel sur les systèmes linéaires
I132 Problèmes non-linéaires

I2 Les phénomènes non-linéaires du type soliton en physique

I21 Historique de l'idée
I22 Expérience de Rayleigh Benard
I23 Optique non-linéaire
I24 Matière condensée

I241 Modèle mécanique
I242 Propagation des dislocations
I243 Solitons

I3 Modèle non linéaire pour le superfluide ^{3}He-B

I4 Présentation des résultats expérimentaux ^{3}He-B

I41 Description sommaire du dispositif expérimental.
I42 Son zéro : présentation
I43 Remarque sur les paramètres du système
I44 Présentation des courbes expérimentales
I45 Conclusion

I5 Références du chapitre I

I1 INTRODUCTION

La première partie de ce travail a pour objet l'étude des phénomènes non-linéaires dans la propagation du son dans le superfluide ^3He en présence des modes de "squashing" et "real squashing".

II11 ^3He présentation du superfluide

Je ne retracerai pas ici l'historique des études concernant l'^3He superfluide. On peut se rapporter à la thèse de C.VIBET (1) ou aux articles de synthèses de OSHEROFF (2), WHEATLEY (3) CROSS et BRINKMAN (4) et P.WÖLFLE (5).

Je me contenterai de présenter les propriétés principales nécessaires à l'introduction de mon travail.

Ainsi, en l'absence de champ magnétique, il existe deux phases dans l'hélium trois superfluide appelées A et B. Leur principale différence est la configuration du gap BCS sur la sphère de Fermi. Dans la phase A, le gap est anisotrope et est nul pour une direction donnée. Dans la phase B le gap est isotrope.

L'état interne du superfluide est caractérisé par les dix-huit composantes du paramètre d'ordre matriciel. A ces dix-huit composantes correspondent, en principe, dix-huit modes propres de vibration interne. C'est l'un de ces modes pour la phase B qui a motivé cette étude.

II111 En phase B

Les modes de la phase B ont été étudiés par un certain nombre d'auteurs dont K.MAKI et P.WÖLFLE.

L'idée de leur classement revient à K.MAKI (6) qui a remarqué que le moment angulaire $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, somme

des moments orbital et de spin , est une quantité conservée dans la phase B. Ainsi $\vec{J}$ et J_z (projection de J suivant l'axe Z) sont de bons nombres quantiques et peuvent être utilisés pour caractériser chaque mode .

Puisque l'on a L = 1 et S =1, J et J_z peuvent donc prendre les valeurs suivantes :

J	J_z
0	0
1	-1 0 +1
2	-2 -1 0 +1 +2.

On retrouve les neufs états avec des phases arbitraire ce qui nous donne dix huit paramètres.

Les équations du mouvement se découplant en parties réelles et imaginaires, il est naturel de classer les vibrations propres du système en mode réel et en mode imaginaire.

Dans le cas d'une phase pseudo-isotrope (aucun couplage avec une entité anisotrope : paroi, champ magnétique, etc...) J_z ne peut intervenir et l'on a en phase B :

J	Mode réel	Mode imaginaire
0	2Δ	0
1	0	2Δ
2	$(\frac{8}{5})^{1/2}\ \Delta$	$(\frac{12}{5})^{1/2}\ \Delta$

Cette classification se retrouve dans le calcul microscopique complet (7) (8) et les énergies propres indiquées sont celles qui correspondent au mode BCS couplage faible.

Les modes J = 0 réel et J = 1 imaginaire ont des énergies de l'ordre de grandeurs du seuil de rupture des paires de Cooper et donc n'ont pas de réalité physique (9). Il ne reste à côté du son zéro (J=0, imaginaire) et des ondes de spin (J=0, réel) déjà connus que les deux quintuplets J = 2 réel et imaginaire qui engendrent des déformations quadruplaires du gap et qui pour cette raison sont appelés modes de "squashing" et de "real squashing".

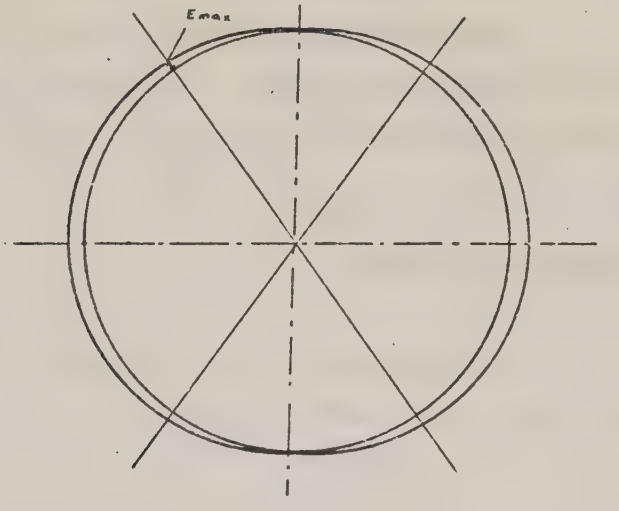


Fig. 1 :

L'identification du mode de "real squashing" et une partie importante des informations expérimentales sur ces deux modes ont été effectués à ORSAY aux cours des deux dernières années (10), (11), (12).

II112 En_phase_A

Dans la phase A une classification fondée sur le moment angulaire est sans intérêt, puisque le gap est anisotrope et possède un moment angulaire intrinsèque.

La phase A a été moins étudiée sur le plan théorique que la phase B car les résultats expérimentaux y sont moins fournis. Les modes collectifs sont toujours au nombre de dix huit et se répartissent de la façon suivante

un mode de son
deux modes d'ondes de spin
un mode d'ondes orbitales
trois modes à 2Δ proches de la brisure de paires
six modes dégénérés de vibrations de paire à $1,22\ \Delta$ (dits de "clapping") dont trois sonttrès faiblement couplés aux perturbations extérieurse.
deux modes dits de "normal flapping"
trois modes dits de "super flapping" dont deux sont très faiblement couplés aux perturbations extérieures
(Cette présentation est due à P.WOLFLE (7))

Cette énumération est en fait qu'un dénombrement des modes possibles.

En phase A, le gap superfluide est anisotrope et s'annule dans la direction de $\vec{\ell}$. Le mécanisme de brisure de paires est toujours possible. Ceci se produit même quand les énergies d'excitation sont faibles pour des vecteurs d'ondes situés dans le cone d'axe $\vec{\ell}$ où le gap tend vers zéro (fig(1)). Ainsi la dissipation associée aux modes collectifs peut être importante : T.DOMBRE et R.COMBESCOT (13) ont montré qu'au zéro absolu la dissipation résiduelle est suffisante pour élargir les modes de clapping et de super flapping en des structures non résonnantes. Le rôle de l'amortissement en phase A est donc considérable et aucune résonance aigue ne peut être mise en évidence.

I12 Les phénomènes non linéaires

L'étude expérimentale de ces modes de "squashing" et "real squasing" pour la phase B, et "clapping" et "flapping"

pour la phase A a révélé l'existence de phénomènes non linéaires très marqués. Polturak et ses collaborateurs (14) ont été les premiers à présenter ces non linéaritésdans la phase B. Parallèlement, le groupe d'ORSAY les a explorées pour la phase A et le premier modèle théorique est proposé (pour la phase B) par J.SAULS (15). Ce modèle nous amène à des équations non linéaires connues dont une solution est du type soliton.

I13 Problèmes expérimentaux liés à l'étude des nonlinéarités

I131 Rappel sur les systèmes linéaires

On possède pour les phénomènes linéaires un outil mathématique puissant qui est l'analyse harmonique,en particulier par les transformés de Fourier et de Laplace.

L'étude expérimentale des phénomènes linéaires peut se faire aisément par des études harmoniques, ce système étant totalement caractérisé par l'amplitude et la fréquence du signal en fonction du temps. C'est pourquoi expérimentalement on recherche généralement la nappe $g(A,t,\phi,z)= 0$ ou plus simplement $g(A,\omega,\phi) = 0$ à $z = Cste$.

A partir de ces données de base on introduit des grandeurs caractéristiques qui marquent la dualité de l'espace et du temps dans la propagation de ces ondes (D.HAYES définit la propagation d'une onde sinusoïdale comme étant un oscillateur spatial et temporel(20)). Ces grandeurs sont les suivantes :

1) vitesse de phase

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_z = \omega$$

2) vecteur d'onde

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_t = k$$

3) Dispersion $\omega = f(k)$

4) Vitesse de groupe $c = \frac{d\omega}{dk}$

5) Atténuation

$$\left.\frac{\partial A}{\partial z}\right|_t = \alpha_a$$

Remarque :

$\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_z$ n'est pas introduit d'une manière générale.

En effet, cette quantité dépend de la forme initiale du signal et de l'atténuation du milieu.

I132 Problèmes non linéaires

Les ondes non linéaires ne peuvent se traiter par l'analyse harmonique. Il se pose alors le problème de la caractérisation des phénomènes par la définition de paramètres adéquats, problème théorique non résolu.

Ainsi l'étude des problèmes non-linéaires se traite au cas par cas en essayant de définir les entités que l'on peut traiter simplement(21).

Expérimentalement, on essaie de se ramener aux notions linéaires et d'étendre certains de ces paramètres aux systèmes non linéaires.

On parle ainsi de vitesse de phase, de vitesse de groupe et d'atténuation.

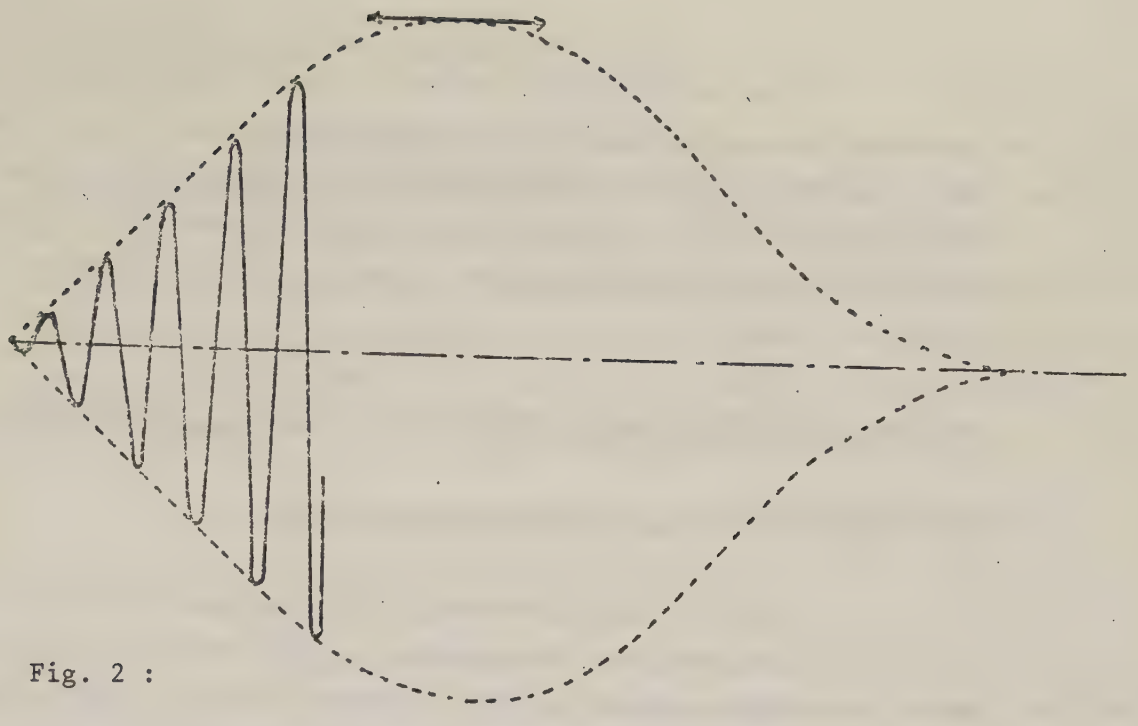


Fig. 2 :

A quoi cela correspond-il ?

Prenons le cas précis de la réception d'un signal acoustique se propageant dans l'hélium. Lesignal reçu est de la forme donnée par la figure (2). C'est à dire une onde sinusoïdale dont l'amplitude est modulée par une gaussienne, pour prendre un cas précis. L'onde se déforme à chaque instant pendant sa propagation dans la substance : on pourrait a priori définir une infinité de vitesses de propagation pour chacun des points de l'enveloppe du signal. Il pourrait en être de même pour l'atténuation.

On définira :

- comme vitesse de phase la variation de phase du fondamental pendant sa propagation dans la substance (La distance de propagation est fixée et le temps depropagation connu).

- comme atténuation la variation de la hauteur maximale du signal.

- comme vitesse de groupe la vitesse de propagation du point de hauteur maximale du signal.

Ces définitions peuvent avoir des justifications intuitives mais elles n'ont d'intérêt que parce qu'elles ont été utilisées pour la description des résultats expérimentaux : ce sera donc avec ces critères que l'on étudiera le comportement des ondes non-linéaires dans la suite de cette thèse.

I2 Les phénomènes non-linéaires de type soliton en physique

I21 Historique de la notion de soliton

Retraçons brièvement l'historique de cette idée.

La première observation de phénomènes non linéaires de type soliton date de 1834 : Scott Russel (16), commissaire anglais, remarqua la propagation d'une onde "solitaire" selon ses propres mots se détachant de la proue d'un navire qui s'immobilisait et se propageant à vitesse constante sans se déformer pendant quelques kilomètres. Après de nombreux essais de classification et de modélisation c'est près de soixante ans plus tard que la résolution analytique du problème fut présentée par Korteweg et de Vries (17) qui du même coup introduisaient la première équation au soliton.

Cette notion restreinte à l'hydrodynamique tombe dans l'oubli et ne reprend l'intérêt qu'au milieu des années 1960 lorsque Zabusky et Kruskal (18) étudiant les équations de Korteweg et Vries démontrent que deux ondes solitaires dirigées de manière à se croiser le font sans se déformer. Cette remarque suggère un parallèle avec les particules élémentaires indestructibles. Depuis cette constatation, les années 1970 ont vu grossir le champ d'application des équations non-linéaires de types soliton (avec d'autres équations que celles de Korteweg et Vries (27). A présent on les trouve également en chimie, en biochimie, en physique des particules élémentaires et en électronique.

I22 Expériences de Rayleigh-Bénard

Ce phénomène non-linéaire est l'un des plus vieux connus puisque les premiers articles de Bénard (22) datent de 1901. Lord Rayleigh en publia la théorie en 1916 (33). Malgré cette ancienneté, l'expérience dite de Rayleigh-Bénard est d'actualité et constitue toujours un champ important d'étude des non-linéarités. Il s'agit de l'étude de la convection naturelle d'un fluide sous gradient de température.

Les phénomènes alors mis en jeu sont triples.
- conduction thermique
- viscosités du fluide
- inhomogénéité de la densité du fluide,

ce qui sous l'action du champ de gravité peut créer des mouvements convectifs.

Les équations qui régissent ces phénomènes sont les équations usuelles de l'hydrodynamique établies à l'aide des considérations de
- conservation de la masse
- conservation du moment cinétique
- conservations de l'entropie (le système est traité par la thermodynamique des processus irréversibles)

L'intérêt de cette expérience est double. D'une part elle permet grâce à un nombre relativement restreint de paramètres l'étude des phénomènes de turbulence qui sont un centre d'intérêt théorique important en ce moment (attracteur étrange, diagramme de Poincaré, étude numérique des équations de Navier - Stockes, etc..) mais permet également l'obtention de résultats expérimentaux sur les phénomènes de convection. Les astrophysiciens notamment ont besoin de ces résultats pour l'étude des étoiles et du soleil en particulier.

Enfin Velarde et al ont montré tout récemment (23) (24) la similitude des équations de Rayleigh-Bénard en dimension deux avec les phénomènes optiques de transparence self-induite décrits plus bas.

I23 Optique non linéaire

L'optique non linéaire s'est développée dans les années 1960 avec l'apparition de sources cohérentes de forte puissance (laser, maser).

Dans certains cas, on peut modéliser ce phénomène à l'aide d'un formalisme quantique par un système à deux niveaux (spin 1/2 équivalent) en interaction avec des photons.

La mise en évidence immédiate de ce phénomène a été la visualisation d'une émission à $\frac{\omega}{3}$, $\frac{\omega}{5}$, ... etc.

L'étude plus précise de la propagation des ondes électromagnétiques dans un cristal s'est poursuivie par l'étude de la propagation d'impulsions lumineuses et la mise en évidence de régime propagatifs très particuliers qui ont permis à Mac Call et Hahn (25) d'introduire la notion de transparence self induite et de soliton.
Dans cet article très complet qui sera cité lors de la parution des résultats expérimentaux sur le mode de real squasking et qui servira d'idée de départ au modèle proposé, on peut remarque que l'inhomogénéité du milieu joue un rôle très important.

I24 Matière condensée

C'est en physique de la matière condensée ou les phénomènes non linéaires sont les plus nombreux. C'est également le lieu privilégié des solutions de type soliton.

Je vais tout d'abord décrire deux phénomènes non linéaires de type soliton puis essayer de mieux définir cette notion.

I241 Modèle mécanique

fig: 3

Soit un ensemble de roues dont le centre de gravité est déplacé par rapport au centre de rotation par un balourd et reliées entre elles par des manchons élastiques.

Dans sa position de repos les centres de gravités des roues sont alignés :
En écrivant la propagation d'une perturbation angulaire ϕ pour la i ième roue il vient

$$I.\quad \frac{d^2\phi_i}{dt^2} = -m.g.\ \sin\phi_i + K.\ [\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}]$$

avec I moment d'inertie de la roue,
m masse du pendule équivalent
k constante élastique

En passant à la limite desmilieux continus on a

$$\phi_{tt} = C_o^2\ \phi_{xx} - \omega_o^2\ \sin\phi$$

avec

$$C_o = [K/I]^{1/2} \qquad \omega_o = [m.g/I]^{1/2}$$

C'est l'équation caractéristique de la propagation d'une onde dans un milieu homogène en dimension un. On retrouvera cette équation tout au long de cette première partie. Elle a pour solution une solution soliton, on peut remarquer que la propagation d'un soliton correspond à une rotation de trois cent soixante degrés des roues.

242 Propagation de dislocation dans un cristal

On considère un modèle de cristal monoatomique à une dimension formée de deux chaînes d'atomes superposées l'une sur l'autre.

Fig 4:

La chaîne inférieure est supposée immobile. La chaîne supérieure à la possibilité de se mouvoir : appelons ϕ_i le déplacement par rapport à sa position d'équilibre du $i^{ème}$ atome de la chaîne supérieure.

On suppose une distribution de potentiel sinusoïdale et l'on écrit pour le $i^{ème}$ atome

$$V_i = A\,[1 - \cos 2\pi\, \phi_i/a] \,.$$

dont l'atome est soumis à une force

$$F_i = - \frac{\partial V_i}{\partial \phi_i} = - \frac{2\pi}{a} A \sin \frac{2\pi\phi_i}{a}$$

d'où l'équation du mouvement en supposant les interactions entre atomes voisins élastiques

$$m(\phi_i)_{tt} = - \frac{2\pi}{a} \sin \left(\frac{2\pi\phi_i}{a}\right) + K\,[\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}]$$

En passant à la limite des milieux continus on retrouve la même équation que précédemment avec

$$C_o = (K/m)^{1/2} a$$

$$\omega_o = (2\pi mA)^{1/2}$$

Dans ce cas la solution soliton correspond au passage d'une position d'équilibre i à une position d'équilibre i+1 soit si l'on raisonne en termes de dislocation à la propagation d'une dislocation d'un vecteur de base du réseau direct.

I243 Solitons

Il me reste à préciser un peu plus cette notion de soliton.

On a vu dans l'introduction que cette notion était corrélée à une onde se propageant sans se déformer, et dans les deux exemples ci-dessus que le soliton était lié à une grandeur constante.

En fait, on peut définir le soliton comme étant caractéristique d'un invariant topologique (19) (charge, énergie, hauteur d'eau, déplacement, etc..)

Dans le cas d'un champ scalaire réel il n'y a pas de soliton de dimension supérieure à un (26).
Pour construire des solitons de dimension supérieure, le champ doit être obligatoirement vectoriel et de même dimension (27).

I3 Modèle pour le comportement non-linéaire de l' ^{3}He en acoustique.

C'est l'article proposé par Sauls qui constitue le point de départ de la première partie de cette thèse, ce paragraphe a pour objet de présenter en détail cet article(15) qui a introduit pour la première fois des équations non-linéaires dans la propagation du son zéro de l' ^{3}He-B superfluide.

I31 Modèle linéaire

Je rappellerai tout d'abord l'existence antérieure

d'une théorie linéaire (28) fondée sur des considérations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, c'est à dire des équations du type

$$\partial_t \delta\rho + \vec{\nabla}.\vec{g} = 0$$

$$\partial_t \vec{g} + \vec{\nabla} P + \vec{\nabla}.\vec{\pi} = 0.$$

où $\delta\rho$ et $\vec{g}$ sont respectivement la variation de densité et la quantité de mouvement.

$P = c^2 \delta\rho$ est la partie diagonale du tenseur des contraintes $\vec{\pi}$, c est la vitesse du son zéro. Le couplage du zéro son aux modes du paramètre d'ordre se fait par $\vec{\pi}$ en négligeant la partie dissipative de $\vec{\pi}$ due à la collision des quasi-particule

$$\pi_{ij} = g' \partial t \; d_{ij}^{(-)} + K' \, d_{ij}^{(+)}$$

avec $d_{ij}^{(-)}$ ($d_{ij}^{(+)}$) proportionnel à la partie imaginaire (réel) du paramètre d'onde.

$g' = \frac{1}{3} \eta \lambda \not{N}$ $\quad$ η facteur de disymétrie particule-trou

$\quad$ n densité

$K' = \frac{8}{5} n \lambda \Delta \eta$ $\quad$ Δ BCS gap

$\quad$ λ coefficient du couplage sans dimension

Pour toute justification on pourra se rapporter aux articles originaux (28) (15) (29). L'existence des modes interne du paramètre d'ordre de "squashing" et de "real squashing" se traduit par les équations suivantes.

$$(\partial_t^2 - c^2\partial_Z^2)\delta\rho = g'\partial_Z^2 (\partial_t \delta^{(-)}) + K'\partial_Z^2(\delta^{(+)}).$$

$$(\partial_t^2 + \omega_{sq}^2) \delta^{(-)} = g (\partial_t \delta\rho).$$

$$(\partial_t^2 + \omega_{rsq}^2) \delta^{(+)} = K (\partial_t^2 \delta\rho).$$

Cette théorie dans le cas des petits signaux est en accord avec les résultats expérimentaux comme l'ont établi O.Avenel et al (10).

La création d'un modèle non-linéaire s'est avérée nécessaire pour les forts signaux. Polturak et al (14) ont publié les premières observations de la propagation de soliton dans le zéro son en phase B et ont remarqué la similitude avec l'optique non-linéaire et l'article de Mac Call et Hahn (25)

I32 Modèle non linéaire

Sauls (15) dans son article se référant au modèle de Mac Call et Hahn, propose en partant d'un système à deux niveaux équivalents des équations de propagation non-linéaires. Je vais donc réintroduire ces équations :

Soit $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ les deux états possibles du système à deux niveau

La dynamique des deux niveaux est régie par l'équation de Schrödinger (30)

$$i\hbar\,\partial_t|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \hbar\omega_{rsq} - \frac{i\hbar}{2\tau} & i\hbar K(\partial_t\,\delta\rho). \\ -i\hbar K\,(\partial_t\,\delta\rho) & 0 \end{pmatrix} |\psi\rangle$$

J'ai introduit une composante d'atténuation supplémentaire par rapport à Sauls soit $-i\hbar/2\tau$ qui, on le verra par la suite, sera nécessaire pour une meilleure description des phénomènes expérimentaux. Pour retrouver le résultat de Sauls il suffira de prendre la limite du système quand τ tend vers l'infini.

Introduisons les nouvelles variables suivantes :

$$S = \langle\psi|\mathrm{II}|\psi\rangle$$

$$R = 2\langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle$$

$$\gamma = \langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle$$

$$\delta = \langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle$$

Il faut donc à partir de ces grandeurs et des équations du mouvement ci-dessus, établir un système d'équations différentiell indépendant. Pour cela, dérivons S, R, γ et δ par rapport au temps et introduisons l'équation dynamique du système

On posera

$$\overline{\overline{M}} = \begin{pmatrix} \omega_{rsq} - \frac{i}{2\tau} & i K (\partial_t \delta\rho) \\ -i (\partial_t \delta\rho) & 0 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \langle \frac{\partial \psi}{\partial t} | \Pi | \psi \rangle + \langle \psi | \Pi | \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle$$

$$= \langle \psi | \overline{\overline{M}}^* + \overline{\overline{M}} | \psi \rangle$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial t} = \langle \psi | \overline{\overline{M}}^* \sigma_z + \sigma_z \overline{\overline{M}} | \psi \rangle$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \langle \psi | \overline{\overline{M}}^* \sigma_y + \sigma_y \overline{\overline{M}} | \psi \rangle$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \langle \psi | \overline{\overline{M}}^* \sigma_x + \sigma_x \overline{\overline{M}} | \psi \rangle$$

avec Π la matrice identité.

Eliminons M, σ_x et $\langle \psi |$.

$$M = -\frac{1}{2} (i\omega_{rsq} + \frac{1}{\tau}) \Pi + 2i K(\partial_t \delta\rho) \sigma_y - (i\omega_{rsq} + \frac{1}{\tau}) \sigma_z$$

$$M^* = -\frac{1}{2} (-i\omega_{rsq} + \frac{1}{\tau}) \Pi - 2i K(\partial_t \delta\rho) \sigma_y - (-i\omega_{rsq} + \frac{1}{\tau}) \sigma_z$$

En rappelant les propriétés des matrices de Pauli

$$\sigma_x.\sigma_y = \frac{i}{2}\sigma_z \ , \ \sigma_y.\sigma_z = \frac{i}{2}\sigma_x \ , \ \sigma_z.\sigma_x = \frac{i}{2}\sigma_y$$

Les opérateurs s'écrivent

$$\bar{\bar{M}}^* + \bar{\bar{M}} = -\frac{\bar{\bar{II}}}{\tau} - \frac{2}{\tau}\sigma_z$$

$$\sigma_z \bar{\bar{M}} = -\frac{1}{2}(-i\omega_{rsq} + \frac{1}{\tau})\sigma_z + K(\partial_t \delta\rho)\sigma_x - (i\omega_{rsq} + \frac{1}{\tau}) II$$

$$\bar{\bar{M}}^* \sigma_z + \sigma_z \bar{\bar{M}} = -\frac{1}{\tau}\sigma_z + 2K(\partial_t \delta\rho)\sigma_x - \frac{1}{2}\frac{\bar{\bar{II}}}{\tau}$$

$$\sigma_y \bar{\bar{M}} = -\frac{1}{2}(i\omega_{rsq} + \frac{1}{\tau})\sigma_y + 2iK(\partial_t \delta\rho)\frac{\bar{\bar{II}}}{4} - \frac{i}{2}(i\omega_{rsq} + \frac{1}{\tau})\sigma_x$$

$$\bar{\bar{M}}^* \sigma_y + \sigma_y \bar{\bar{M}} = -\frac{\sigma_y}{\tau} + \omega_{rsq}\sigma_x$$

$$\sigma_x \bar{\bar{M}} = -\frac{1}{\tau}(i\omega_{rsq} + \frac{1}{\tau})\sigma_x - K\partial_t(\delta\rho)\sigma_z + (i\omega_{rsq} + \frac{1}{3})\frac{i}{2}\sigma_y$$

$$\bar{\bar{M}}^* \sigma_x + \sigma_x \bar{\bar{M}} = -\frac{\sigma_x}{\tau} - 2K\partial_t(\delta\rho)\sigma_z - \omega_{rsq}\sigma_y$$

d'où

$$\partial_t S = \langle\psi| -\frac{\bar{\bar{II}}}{\tau} - \frac{2}{\tau}\sigma_z|\psi\rangle$$

$$\frac{1}{2}\partial_t R = \langle\psi| -\frac{\bar{\bar{II}}}{2\tau} - \frac{\sigma_z}{\tau} + 2K\partial_t(\delta\rho)\sigma_x|\psi\rangle$$

$$\partial_t \gamma = \langle\psi| -\frac{\sigma_y}{\tau} + \omega_{rsq}\sigma_x|\psi\rangle$$

$$\partial_t \delta = \langle\psi| -\frac{\sigma_x}{\tau} - 2K\partial_t(\delta\rho)\sigma_z - \omega_{rsq}\sigma_y|\psi\rangle$$

Ce qui donne de part les propriétés de linéarité du produit scalaire et par définition de R, S, γ et δ

$$\partial_t S = - \frac{R + S}{\tau}$$

$$\partial_t R = - \frac{S + R}{\tau} + 4 K \partial_t (\delta\rho) \delta$$

$$\partial_t \gamma = \omega_{rsq} \delta - \frac{\gamma}{\tau}$$

$$\partial_t \delta = - \omega_{rsq} \gamma - \frac{\delta}{\tau} - K \partial_t (\delta\rho) R.$$

La première démarche est de vérifier si le système non linéaire établi se réduit dans le cas des faibles signaux aux équations linéaires introduites précédemment. On suppose pour cela, que $|\uparrow\rangle$ est très faiblement occupé et l'on suppose $S = 1$

donc $\langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1 - \langle\uparrow|\uparrow\rangle$ par définition de S

$$|| \, |\downarrow\rangle \, || \simeq 1 - \frac{\langle\uparrow|\uparrow\rangle}{2}$$

en se limitant au premier ordre

Dans ce cas et par définition de S, R, γ et δ .

$$R = \langle\uparrow|\uparrow\rangle - \langle\downarrow|\downarrow\rangle = -1$$

$$\gamma = \text{Im} (\uparrow) \quad \text{avec} \quad |\uparrow\rangle \Big| \begin{matrix} \uparrow \\ 0 \end{matrix}$$

$$\delta = \frac{\uparrow + \uparrow^*}{2} = \text{Re} (\uparrow)$$

Ce qui nous conduit aux équations

$$\partial_t S = 0$$

$$\partial_t R = 0$$

$$\partial_t \gamma = \omega_{rsq}\delta - \frac{\gamma}{\tau}$$

$$\partial_t \delta = -\omega_{rsq}\gamma - \frac{\delta}{\tau} + K\,\partial_t(\delta\rho).$$

en couplant les deux dernières équations il vient

$$\partial_t^2 \delta = -\omega_{rsq}\,\partial_t \gamma - \frac{\partial_t \delta}{\tau} + K\,\partial_t^2(\delta\rho).$$

$$\partial_t \gamma = \omega_{rsq}\,\delta - \frac{\gamma}{\tau}$$

$$\omega_{rsq}\frac{\gamma}{\tau} = -\frac{\partial_t}{\tau}\,\delta - \frac{\delta}{\tau^2} + K\frac{\partial_t}{\tau}(\delta\rho).$$

$$\Rightarrow \partial_t \gamma = \omega_{rsq}\delta + \frac{1}{\tau\omega_{rsq}}\left|\partial_t \delta + \frac{\delta}{\tau} - K\,\partial_t(\delta\rho)\right|$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 \delta = -\omega_{rsq}^2\,\delta - \frac{\partial_t\delta}{\tau} - \frac{\delta}{\tau^2} - \frac{\partial_t\delta}{\tau} + K\,\partial_t^2(\delta\rho) + \frac{K\partial_t}{\tau}(\delta\rho).$$

On retrouve l'équation linéaire pour le mode de real squashing en négligeantles termes en K/τ et en $1/\tau^2$ qui sont petits si K la constante de couplage et $1/\tau$ l'amortissement sont faibles.

Les équations décrivent correctement les phénomènes linéaires. Pour rendre le système plus compact introduisons $\gamma = \gamma' e^{-t/\tau}$ et des expressions similaires pour les trois autres variables. Le système s'écrit alors

$$\partial_t S' = \frac{-R'}{\tau}$$

$$\partial_t R' = -\frac{S'}{\tau} + 4K\,\partial_t(\delta\rho)\,\delta'$$

$$\partial_t \gamma' = \omega_{rsq}\,\delta'$$

$$\partial_t \delta' = -\omega_{rsq}\,\gamma' - K\,\partial_t(\delta\rho)\,R'$$

en éliminant S' et γ' le système se réduit alors à trois équations couplées.

$$\text{I B} \quad 1 \qquad \partial_t^2 R' = \frac{R'}{\tau^2} + 4K\,\partial_t\,(\delta_t(\delta\rho)\,\delta').$$

$$2 \qquad \partial_t^2 \delta' = -\omega_{rsq}^2\,\delta' - K\partial_t\,(\partial_t(\delta\rho)\,R')$$

$$3 \quad (\partial_t^2 - c^2\partial_z)\delta\rho = K' \partial_z^2 (\delta') e^{-t/\tau}$$

Le système ne peut se réduire plus avant sans l'aide d'approximations. C'est ainsi que Sauls introduit l'approximation de l'enveloppe suivant en cela Mc Call et Hahn. Cette approximation consiste à poser

$$\delta\rho(z,t) = A(z,t) \cos \xi$$
$$\delta'(z,t) = D'(z,t) \cos\xi + E'(z,t) \sin\xi$$
$$\xi = \omega t - kz + \phi$$

et à négliger les dérivées d'ordre supérieur à un des fonctions A,D, E et ϕ

On reviendra au chapitre II sur cette approximation qui suppose les signaux d'amplitude et de phase lentement variables.

Donc, en replaçant $\delta\rho$ et δ dans le système précédent et en décomposant suivant les termes en $\sin\xi$ et $\cos\xi$ pour les trois équations on arrive au système

$$(\partial_t + c\,\partial_z)A = (-\frac{K' e^{-t/\tau}}{2c^2}) \left| 2c\ \partial_z D' + \omega E' + 2cE'\partial_z\phi \right| .$$

$$A(\partial_t + c\ \partial_z)\phi = (-\frac{K' e^{-t/\tau}}{2c^2}) \left| 2c\ \partial_z E' - \omega D' - 2c\ D'\partial_z\phi \right|$$

$$\partial_t D' = \Delta\omega E' - E'\partial_t\phi - \frac{K}{2} \left| A\,\partial_t R' + 2R'\,\partial_t A \right|$$

$$\partial_t E' = -\Delta\omega D' + D'\partial_t\phi - \frac{K}{2} \left| \omega - 2\,\partial_t\phi \right| AR'$$

$$\partial_t^2 R' = \frac{R'}{\tau^2} + 2K\omega \left| A\,\partial_t E' + E'\partial_t A \right| .$$

Avec : $\Delta\omega = \dfrac{\omega^2 - \omega_{rsq}^2}{2\omega}$

Ce système diffère de celui proposé par Sauls par l'absence de terme en $D\,\partial_t A$ dans l'expression de $\partial_t^2 R'$ et par des coefficients légèrement différents en $\partial_t D$.

Cela n'est pas préjudiciable à la suite du raisonnement de part le degré des approximations. Ainsi pour poursuivre on suppose la phase stationnaire et le système à la résonance. On a alors :

I C

$$1)\quad (\partial_t + c\,\partial_z)A = -\frac{K'\,e^{-t/\tau}}{2c^2}\left|2c\,\partial_z D' + \omega E'\right| .$$

$$2)\quad 0 = \left(2\,c\,\partial_z E' - \omega D'\right)\cdot(-K'\,e^{-t/\tau}2c^2)$$

$$3)\quad \partial_t D' = -\frac{K}{2}\left|\frac{A\,S}{\tau} + 2K\,A\,\right| \quad + \omega\,AE'\Big| + R'\,\partial_t A\Big|$$

$$4)\quad \partial_t E' = -\frac{K}{2}\,\omega\,AR'$$

$$5)\quad \partial_t R' = -\frac{S}{\tau} + 2K\,\Big| \qquad + \omega AE'\Big| .$$

$$6)\quad \partial_t S = -\frac{R'}{\tau} .$$

de I C 2 on a $\partial_z E' = \frac{\omega}{2c}\,D'$.
on suppose alors $\partial_z E' < E'$ et le système s'écrit

$$(\partial_t + c\,\partial_z)\,A = -\frac{K'\,e^{-t/\tau}}{2c^2}\,\left|2c\,\partial_z D' + \omega\,E'\right| .$$

$$\partial_t E' = -\frac{K}{2}\,\omega\,AR'$$

$$\partial_t R' = -\frac{S'}{\tau} + 2K\omega\,AE$$

$$\partial_t S = -\frac{R'}{\tau}$$

A atténuation nulle et en posant $\tilde{A} = K\omega\,A$

$$\tilde{E} = 2E'$$

$$\alpha = \frac{KK'\,\omega^2}{4c^2}$$

On retrouve alors l'expression proposée par Sauls.

I D

$$1\quad (\partial_t + c\,\partial_z)\,\tilde{A} = -\alpha\tilde{E}$$

$$2\quad \partial_t E = -\tilde{A}\,R'$$

$$3\quad \partial_t R' = \tilde{A}\,\tilde{E}$$

Et donc la solution soliton en posant $\tilde{A} = \partial_t \sigma$

$\tilde{E} = \sin\sigma$ et $R' = -\cos\sigma$

avec $\sigma = \sigma(z-vt)$. On a

$$\sigma'' + \alpha_v \sin\sigma = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha_v = \frac{\alpha}{v(c - v)} .$$

La solution soliton normée à 2π en surface s'écrit

$$\tilde{A}\,(z - vt) = 2(\alpha_v)^{1/2} v \operatorname{sech} \left|(\alpha_v)^{1/2}\,(z - vt)\right|$$

Le modèle développé satisfait donc aux contraintes petits signaux et donne bien dans le cas non linéaire des solitons.

Il reste donc à calculer les grandeurs expérimentales caractéristiques et à les comparer à l'expérience.
En l'occurence Sauls compare ses calculs aux résultats de NORTHWESTERN (31) et de CORNELL(14).

Ainsi il calcule la vitesse de propagation du soliton en introduisant la quantité τ_P tel que

$$2.\ (\alpha_v)^{1/2}.\ v.\ \tau_P = 2\pi .$$

On relie τ_P à la largeur à mi hauteur dela sécante hyperbolique τ_F par

$$\tau_F = 0{,}84\ \tau_P .$$

on a donc

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{1 + \alpha(\tau_P/\pi)^2} .$$

Pour la comparaison expérimentale Sauls prend

$$\alpha = \frac{4}{15}\,\lambda\,(\eta\,\omega\,v_F/c)^2$$

avec

$$\frac{c}{v_F} = 11 \qquad P = 24 \text{ bars} \qquad \frac{\omega}{2\pi} = 100 \text{ MHz}$$

$$\lambda = 1 \qquad \alpha(\tau_P/\pi)^2 = 2{,}1\ 10^{-3}\tau_F \quad (\tau_F \text{ en } \mu s).$$

Et il obtient

$$v/c = 0,98 \text{ pour } \tau_F = 3 \mu s.$$

$$v/c = 0,90 \text{ pour } \tau_F = 7 \mu s.$$

L'écart entre le calcul de v/c théorique et celui observé est expliqué en remarquant que la courbe expérimentale dans la zone de soliton (2π) (Fig. 5) ne passe pas par l'origine. Cette translation provient d'après Sauls d'une faible dispersion due à la proximité du mode de quashing.

Après correction de ce terme dans lescalculs théoriques on trouve $v/c = 0,92$ ce qui est en accord avec les variations de vitesse du son zéro au voisinage du mode de squashing de CALDER et al (31).

Cette dernière correction amèneles vitesses des solitons de 3 et 7µs de large en accord avec les expériences de Polturak et al (14). Nous verrons que cet accord n'est qu'apparent. Sauls conclut en disantqueles 2 marches obtenues dans le graphe de la vitesse en fonction de l'amplitude dans l'article de Polturak (14) n'estpas caractéritique d'un soliton mais de l'interaction de plusieurs. (Chap. III.Fig.5-1)

Pour lui seuls les points expérimentaux compris entre le premier comportement non linéaire observé et la 1ere marche est due à 1 soliton. Dans ce cas la pente calculée est de $1,9.10^{-3}$ alors que le résultat théorique est de $2,1.10^{-3}$ Fig. (5).

I4 ^{3}He-B Présentation des résultats expérimentaux

Après la présentation des phénomènes non linéaires et de l'article de Sauls, il est à présentnécessaire de faire le point sur les données expérimentales concernant la propagation du son zéro dans le superfluide afin de replacer l'article décrit plus haut dans son contexte et de définir mes objectifs.

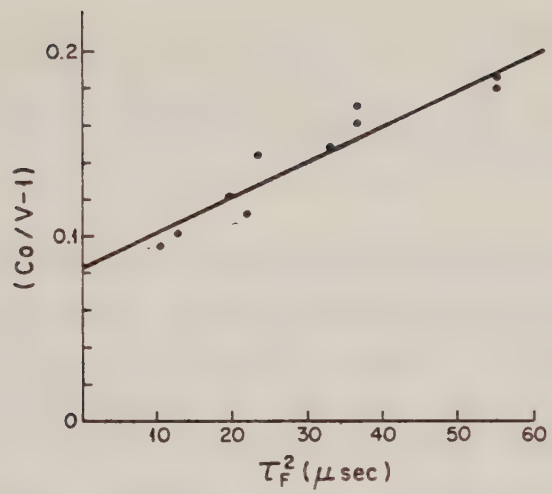


Fig. 5 : Relevé expérimental proposé par Saüls à partir des résultats de Cornell. Il s'agit de résultats expérimentaux prélevés sur la courbe Chap. III. Fig. 5.1. dans la zone d'existence supposée du soliton 2π en référence aux relevés Chap. III. Fig. 5.2.

I.4.1 Présentation du dispositif expérimental

L'étude de la propagation d'une onde acoustique dans le superfluide ^{3}He-B nécessite un dispositif expérimental complexe qui permet l'obtention de températures d'hélium aussi basses que 0,5 mK pour des pressions variables de 0 à 30 bars.

Avant de présenter les résultats expérimentaux concernant le propagation du son dans le superfluide je vais brièvement décrire le dispositif utilisé à Orsay qui est similaire de celui de Cornell d'où sont tirées mes informations.

L'obtention des basses températures est obtenue par trois étages de réfrigération.

Le premier étage à évaporation d'hélium 4 ramène le système à une température de l'ordre de 1°K.

L'étage à dilution He^3-He^4 abaisse la température à environ 20 mK et le dernier étage a désaimantation nucléaire permet de maintenir de quelques heures à quelques jours des températures variables de 0,3 mK à quelques mK.

L'isolation thermique de l'ensemble est obtenu par plusieurs enceintes :

- une enceinte d'azote liquide,
- une enceinte de vide
- un blindage contre les rayonnements électromagnétiques.

La cellule acoustique qui est au coeur du dispositif est composée de 2 quartz acoustiques distants de 3,24 mm (dans le cas de Cornell) et baignant dans le superfluide.

L'expérience consiste à envoyer un train d'onde acoustique par le 1er quartz et a regarder avec le second l'allure du signal après 3,24 mm de propagation dans la substance. La qualité de réception du signal est cruciale, il est donc nécessaire de posséder une électronique d'enregistrement performante.

I42 Présentation du son zéro

En traçant l'atténuation du système en fonction de la pulsation, on s'aperçoit que le son zéro peut être défini comme un système possédant 2 fréquences de forte atténuation ω_{sq} et ω_{rsq} (fig6)

Ces deux atténuations révèlent un couplage du son zéro avec les deux modes présentés en début de ce chapitre le mode de squashing et le mode de real squashing pour les deux fréquencesintroduites plus haut soit respectivement ω_{sq} et ω_{rsq}

I43 Remarque sur les paramètres d'étude du système. L'étude de système résonnant nécessite la connaissance de la nappe $g(A, \omega, \phi) = 0$. or l'étude de l'hélium 3 nous fournis 5 paramètres Pression, température, fréquence phase et amplitude . Cette surabondance de paramètres cache en fait une relation entre la fréquence, la température et la pression.

En effet le gap du système varie en fonction de la température et de la pression.

On pourra donc tracer indifféremment les courbes de résonance à (ω, P) fixé et t variable ou à toute permutation circulaire du triplé (ω, P, t).

Les contraintes expérimentales laisseront la possibilité de choisir indifféremment entre la température et la fréquence.

I44 Présentation des courbes expérimentales

La présentation de la distribution spectrale des 2 modes introduit en I41 fig (6) a été mis en évidence à 3 bars

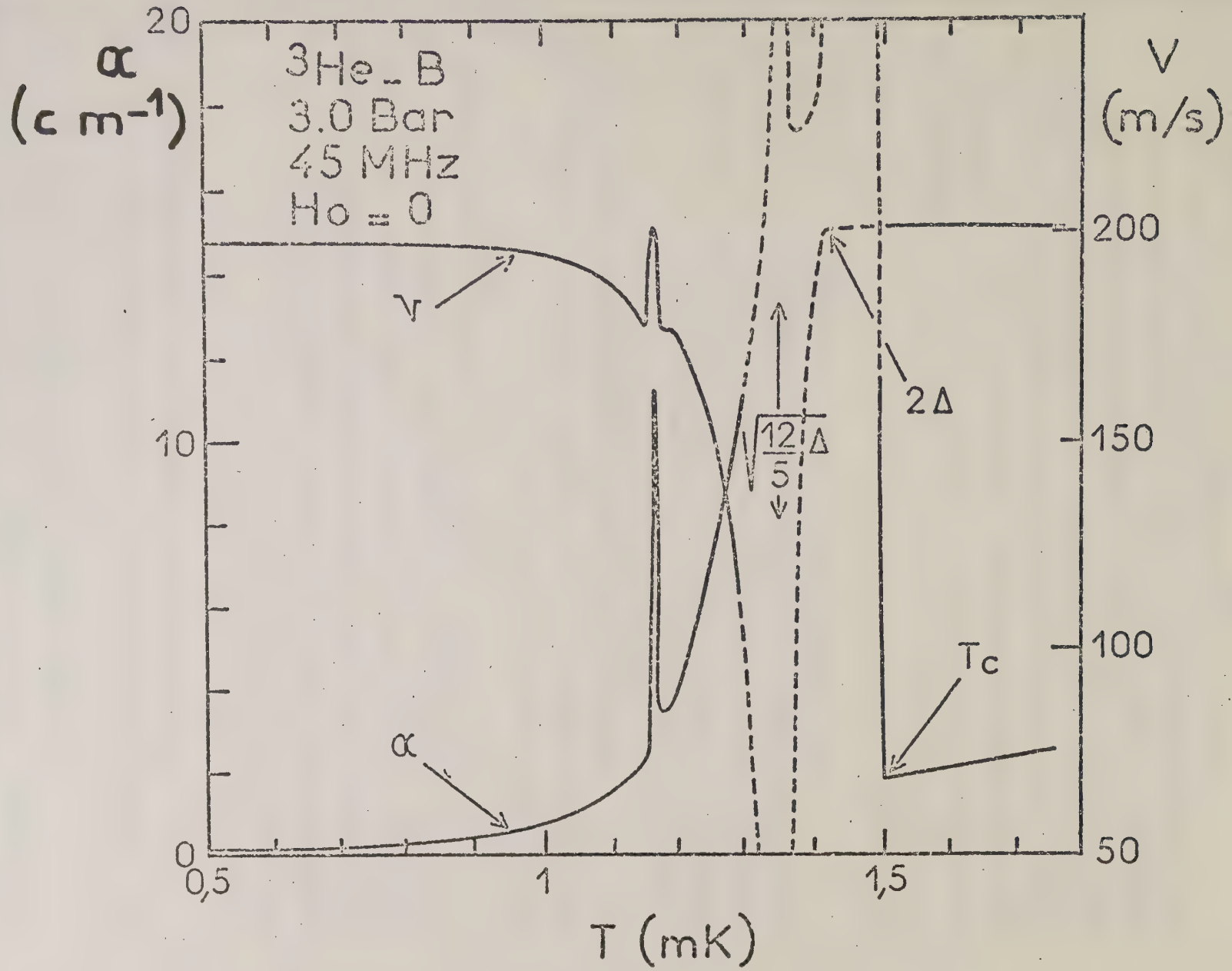


Fig.6 : Courbe d'atténuation du son et de vitesse de groupe en phase B : On remarque les 2 modes squasking et real squesking.

et à une fréquence de 45 MHz on remarquera qu'elle est représentée en fonction de la température.

Le pic à 1,16 mK correspond au mode de real squashing et la montée après 1,2mk correspond au mode squashing on peut remarquer la disproportion dans l'atténuation entre les 2 modes : en fait le phénomène d'atténuation dans le mode de squashing est si important que l'on n'a pu observer de saturation. Son étude n'a été effectuée qu'indirectement à ORSAY (11) par des mesures d'impédance acoustique. Dans toute la suite de ce travail on négligera l'influence du mode de squashing on ne s'interessera qu'au mode de real squashing supposé loin du précédent.

Sur la même figure on peut remarquer la courbe de vitesse de groupe v en fonction de la température. On remarque un pic à T_{sq} et la chute de la vitesse lors de l'apparition du mode de squashing en fait l'atténuation étant trop importante on ne peut plus la définir pour $\omega \simeq \omega_{sq}$.

Limitons nous au mode de real squashing. La courbe d'atténuation du système pour les diverses valeurs de la température et de l'amplitude est donnée fig (7).

Les mesures ont été faites à CORNELL (32) sous une pression de 29 bars et à une fréquence de 100 méga Hz
On peut remarquer que la largeur de raie augmente avec l'atténuation du signal émis, et surtout que l'atténuation du signal émis diminue lorsque la puissance augmente jusqu'à être quasiment nulle d'où l'idée d'associer ce phénomène à celui de la transparence self-induite en optique.

Pour terminer cette présentation expérimentale du mode de squashing je reprendrais la remarque de Polturak et al (32).

La bande passante du mode mesuré à 24 bars et à 1mk en faisant varier la fréquence nous donne une largeur de 600 KHz ce qui est étonnamment large comparé à tous les mécanismes d'élargissement connus : toujours d'après POLTURAK et al la largeur

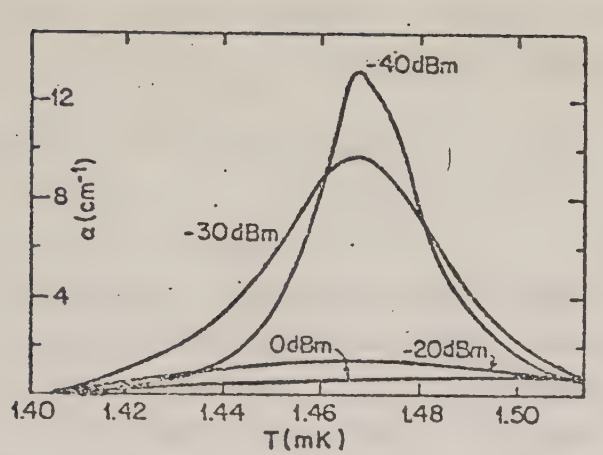


Fig.7 : Courbes d'atténuation du son au voisinage du mode real squasking; mesure à 29b et 100 MHz et paramètré en puissance d'émission.

due au temps de relaxation des quasi particules est inférieure à 10 KHz et la dispersion inférieure à 20 kHz.

I45 Conclusion

Ainsi devant ces données expérimentales il fallait trouver un modèle non linéaire qui tienne compte de ces phénomènes d'amortissement.

Comme je l'ai dit plus haut Sauls a été le premier à proposer un modèle pour ces phénomènes . La suite de ce travail se propose d'en étudier la validité. Ce qui posera en même temps le problème de la modélisation par un système à deux niveaux et de l'interprétation de la largeur de raie à la résonance ..

Pour cela j'étudierai dans le chapitre II le système d'équation de Sauls analytiquement et numériquement en calculant les grandeurs caractéristiques des solutions ce qui me permettra dans le chapitre III de comparer les résultats du modèle avec les résultats expérimentaux de la phase B.

I6 Références du chapitre I

1. C.VIBET Thèse de doctorat d'état ORSAY 1979
2. D. D. OSHEROFF-Low temp phys LTXV (Grenoble) volIII(1978)C6 127
3. J.C.Wheatley-prog in low temp phys J (1978) 1
4. W.F. Brinkman, MC Cross-Prog. in Low Temp. Phys. (1978) 105.
5. P. WOLFLE - Prog in low temp Phys J (1978) 191
6. M. MAKI-J. Low temp Phys 24 (1976) 755
7. P. WOLFLE-Physica 90 B, 96
8. N.Schopohl, L. Tewordt - J. Low temp Phys (à paraître)
9. R.COMBESCOT conférence ORSAY 1982
10. 0. Avenel, L. Piché, E. Varoquaux Physica 107 B (1981) 693
11. O. Avenel, L. Piché, W.M. Saslow, E.Varoquaux, R. Combescot Phys review letters 471 (1981) 103
12. 0.Avenel, E.Varoquaux, H.Ebisawa - Phys. review letters 45, (1980) 1952
13. T.DOMBRE, R.Combescot - Physica, 197B (1981) 51
14. E.Polturak, PGN de Vegvar, E.K. Zeise, D.M. Lee-Phy review letters 46 (1981) 1588
15. J.A.Sauls - Phys review letters - 47 (1981) 530
16. Russel J.Scott - Proc. Roy. Soc Edingurgh (1844) 319
17. D.J. KORTEWEG, G. de VRIES - Phil. Mag 39 (1895) 422
18. N.J. ZABUSKY, M.D.Kruskal - Phys review letters 15 (1965) 240
19. A.Libchaber, G.Toulouse - La recherche 73 (1976) 1027
20. D.HAYES Non linear Waves - Cornell university press
21. S.Leibovich, A.R. Seebass - Non linear waves cornell universit press
22. H.Benard - Ann de chimie et physique 23 (1901) 62
23. M.G.Verlade, J.C.Antoranz -Prog. Theor. Phys 55 (1981) 717
24. M.G.Verlade, J.C.Antoranz- Physics letters 80A (1980) 220
25. SL. Mc Call, El. Hahn - Physical review 183 (1969) 457
26. GH. DERRICK- J.Math. Phys. 5 (1964) 1252
27. K.MAKI-J de Physique C6 (1978) 1450
28. P.Wölfle - J Phys (Paris), Colloq C6 (1978) 1278
29. V.E. KOCH, P.Wolfle - Phys review lett. 46 (1981) 486
30. C.C. Tannoudji, B.DIU,F.Laloé - Mécanique quantique Tome 1Herman Editeur
31. I.D.Calder, D.B. Mast, B.K. Sarma, JRO. Bradley, J.B.Ketterson W.P. Haljserin - Phys rev let 45 (1980) 1866
32. PGN de Vegvar, SS. Yan, D.Sagan, E.Polturak, D.M. Lee- Physica 107B(1981) 683
33. Lord Rayleigh-Phil Mag S6 vol 32 (1916) 192

CHAPITRE II

Etude analytique et numérique du modèle non linéaire.

II1 Introduction

II2 Etude analytique

21 Dispersion et atténuation
211 Calcul
212 Comportement aux limites
213 Existence d'un gap

22 Approximation de l'enveloppe
221 Présentation
222 Cas homogène
2221 Régime petits signaux
2222 Cas non linéaire
223 Système inhomogène

II3 Solutions proches de l'expérience

31 Présentation du calcul numérique
32 Présentation des solutions

II4 Références du chapitre II

CHAPITRE II

II1 Introduction

Ce travail a pour but de vérifier la validité du modèle proposé par SAULS et éventuellement l'améliorer par l'introduction de nouveaux phénomènes tels que la relaxation, ou l'inhomogénéité pour poursuivre l'analogie avec l'optique.

Pour cela je vais mettre en évidence les principales caractéristiques du modèle dans les diverses configurations rencontrées.

II2 Etude analytique

21 Dispersion et atténuation

211 Calcul

Je commence par l'étude du modèle linéarisé c'est à dire en régime petits signaux.
Reprenons le système introduit au paragraphe I3

$$\text{II.A} \quad \begin{aligned} &1\ (\partial_t^2 - c^2\,\partial_z^2)\,\delta\rho = K'\,\partial_z^2\,(\delta) \\ &2\ (\partial_t^2 + 2/\tau\partial_t + \omega_{rsq}^2 + 1/\tau^2\ )\delta = K\left|\frac{\partial_t(\delta\rho)}{\tau} + \partial_t^2\,(\delta\rho)\right| \end{aligned}$$

Je vais tout d'abord le simplifier :

ω_{rsq} est de l'ordre d'une centaine de mega Hz
et τ de l'ordre de 10^{-6} seconde au minimum. On peut donc négliger $1/\tau^2$ devant ω_{rsq} avec une erreur maximale de 0,01 %
et $\frac{\partial t\ (\delta\rho)}{\tau}$ devant $\partial_t^2\ (\delta\rho)$ avec une erreur de l'ordre de 1%.

Le système simplifié s'écrit alors

$$\text{II.B} \quad \begin{aligned} &1\ (\partial_t^2 - c^2\partial_z^2\ )\delta\rho = K'\partial_z^2\ (\delta). \\ &2\ (\partial_t^2 + 2/\tau\ \partial_t + \omega_{rsq}^2\ )\ \delta = K\partial_t^2\ (\delta\rho) \end{aligned}$$

Je pose :

II C 1 $\delta\rho = \delta\rho_o \, e^{-i(\omega t - kz)}$

2 $\delta = \delta_o \, e^{-i(\omega t - kz)}$

En placant IIC dans IIB on obtient

$$(-\omega^2 + c^2 k^2)\, \delta\rho_o = -K' k^2 \delta_o$$

$$(-\omega^2 + \omega_{rsq}^2 - i\,\omega/\tau')\, \delta_o = -K\omega^2 \delta\rho_o .$$

avec $\frac{1}{\tau'} = \frac{2}{\tau}$.

J'élimine δ_o et $\delta\rho_o$

II D $$\frac{\delta_o}{\delta\rho_o} = \frac{\omega^2 - c^2 k^2}{K' k^2} = \frac{K \omega^2}{\omega^2 - \omega_{rsq}^2 + i\omega/\tau'}$$

La relation de dispersion du système s'écrit donc :

II E $$\left(\frac{1}{k}\right)^2 = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left| 1 + \frac{KK'}{c^2 \left| 1 - \frac{\omega_{rsq}^2}{\omega^2} + \frac{i}{\tau\omega} \right|} \right|$$

Posons $k = k' + i\,k''$, $\chi = \frac{KK'}{c^2}$, $a = 1 - \frac{\omega_{rsq}}{\omega^2}$ et $b = \frac{1}{\tau\omega}$

χ , a et b sont des grandeurs sans dimension.

Il vient donc que :

$$(k' + ik'') = \frac{\omega}{c} \, \frac{1}{\sqrt{1 + \chi \cdot \frac{1}{a+ib}}}$$

Pour expliciter k' et k'' je pose :

$$\chi' = 1 + \frac{\chi a}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \chi'' = \frac{-\chi b}{a^2 + b^2}$$

ce qui donne

$$k' = \frac{\omega}{c} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{\frac{\chi'}{\chi'^2 + \chi''^2} + \frac{1}{\sqrt{\chi'^2 + \chi''^2}}}$$

$$k'' = \frac{\omega}{c} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{-\chi'' \,/(\chi'^2 + \chi''^2)}{\sqrt{\frac{\chi'}{\chi'^2 + \chi''^2} + \frac{1}{\sqrt{\chi'^2 + \chi''^2}}}}$$

On a :

$$\chi'^2 + \chi''^2 = \left(1 + \frac{\chi a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \chi^2 \left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)^2 = \frac{(a+\chi)^2 + b^2}{a^2 + b^2}$$

On a $k' = \frac{\omega}{c_\phi}$ avec c_ϕ vitesse de phase

$k'' = \alpha_a$ atténuation du système

II F 1 $$\frac{c_\phi}{c} = \left| 2 \frac{1 + \frac{2\chi a + \chi^2}{a^2 + b^2}}{1 + \frac{\chi a}{a^2+b^2} + \sqrt{1 + \frac{2\chi a+\chi^2}{a^2 + b^2}}} \right|^{1/2}$$

$$2 \quad \alpha_a = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \frac{c_\phi}{c} \frac{\chi\, b}{(a+\chi)^2 + b^2}$$

Remarque : Les calculs détaillés sont reportés à l'annexe 2.

2 12 Comportement aux limites

Le comportement aux limites de l'atténuation est de type lorentzien, α_a s'annulant pour $b \to 0$ et $b \to +\infty$.

Pour la vitesse de phase, on a :

$$\lim_{b \to 0} \frac{c_\phi}{c} = \left| 2 \frac{1 + \frac{2\chi a + \chi^2}{a^2}}{1 + \frac{\chi a}{a^2} + \sqrt{1 + \frac{2\chi a + \chi^2}{a^2}}} \right|^{1/2}$$

Cette expression ne dépend plus que de l'écart à la résonance a et ses comportements dans les deux cas limites $a \to 0$ et $a \to \infty$ sont les suivants :

$$\lim_{a \to 0} \left(\lim_{b \to 0} \frac{c_\phi}{c} \right) = \infty$$

$$\lim_{a \to +\infty} \left(\lim_{b \to 0} \frac{c_\phi}{c} \right) = 1$$

Loin de la résonance, le son se propage à la vitesse c_o ce qui est en accord avec les théories classiques mais àla résonance on trouve une vitesse de phase infinie ce qui ne correspond à rien de réel.

En fait dans ce cas un système résonnant non amorti possède une amplitude infinie on est donc loin de l'approximation des petits signaux faite pour utiliser ce modèle.

$$\lim_{b \to \infty} \frac{c_\phi}{c_o} = 1$$

On trouve la vitesse de propagation d'une onde d'amplitude nulle soit c_o par définition.

213 Existence d'une bande interdite (gap) dans la courbe de dispersion

Si je reprend la limite à atténuation nulle de c_ϕ / c_o elle peut s'écrire :

$$\lim_{b \to 0} \frac{c_\phi}{c_o} = \left| \frac{2(a+\chi)^2}{a(a+\chi) + |a(a+\chi)|} \right|^{1/2}$$

Pour a compris entre zéro et $-\chi$, $a(a+\chi)$ est négatif et donc :

$$\lim_{b \to 0} \left| \frac{c_\phi}{c_o} \right| = \infty \qquad 0 > a > -\chi$$

Ce domaine est borné par 2 limites

$$\lim_{a \to 0^+} \left| \frac{c_\phi}{c_o} \right|_{b=0} = \infty$$

$$\lim_{a \to -\chi^-} \left. \frac{c_\phi}{c} \right|_{b=0} = 0$$

Dans le même intervalle :

$$\alpha_a = \frac{1}{2} \frac{c_\phi}{c} \frac{\chi b}{(a+\chi)^2 + b^2}$$

Après avoir développé χ_a en b on a :

$$\lim_{b \to 0^+} \left. \alpha \right|_{0 > a > -\chi} = G(a)$$

Et donc, pour a compris entre zéro et $-\chi$.
(soit pour $\omega^2_{rsq} > \omega^2 > \omega^2_{rsq}/\chi+1$) on est dans une situation de vitesse infinie et d'atténuation finie. Toute propagation est impossible dans cette zone et l'on peut parler de gap.

Si cette notion est bien connue pour les photons ou les électrons dans des milieux matériels elle n'a pas encore été observée pour desondes de densité.

Pour le modèle de Sauls, ce gap ne rend pas la phase instable au contraire de ce qui se passe pour le modèle phénoménologique utilisé pour l'analyse des expériences d'indépendance acoustique d'Orsay I.3. On peut voir en annexe 2 qu'il ne s'agit pas de 2 modes comme dans le modèle phénoménologique de la référence I.3 mais d'un seul mode qui se sépare en 2. Cette différence provient du choix des termes de couplage fait par SAULS.
(J'ai montré en annexe 1 que ces termes decouplage ne dérivent pas d'un lagrangien). En effet les équations pour le modèle de la référence (1) sont de degré 4 (soit 2 modes distincts) pour la phase B elles ne sont que de degrés 2 (soit 1 mode).

Pour faire disparaître le gap en question il suffit d'introduire une vitesse de propagation du mode dans les équations, on retrouve alors des équations de degrés 4 voir annexe 2.

Le modèle "petits signaux" présente donc des comportements aux limites incorrects (vitesse de phase nulle ou infinie existence d'un gap) dus en partie aux choix des termes de couplage.

L'introduction d'une vitesse de propagation et d'une atténuation du mode améliore le modèle en supprimant le gap et en ramenant à des valeurs finies et non nulles la vitesse de phase.

22 Approximation de l'enveloppe

Pour poursuivre l'étude analytique dans le cas non linéaire il est nécessaire de limiter les classes de solutions en simplifiant le système d'équation par l'approximation dite de l'enveloppe.

Cette approximation venue de l'article de Mc Call et Hahn (2) n'ayant été à ma connaissance jamais analysée en détail je vais en montrer les principales caractéristiques pour notre modèle.

221 Présentation

Cette approximation consiste à chercher des solutions sous la forme

$$\delta\rho = A \cos\xi$$

avec

$$\xi = \omega t - kz + \phi(z,t) \text{ et } A = A(z,t).$$

en supposant A et ϕ lentement variables ce qui permet d'en négliger les dérivées supérieures.

Remarques

1) Si A et ϕ sont constants cela revient à chercher les solutions harmoniques du système. Cette approximation peut donc être présentée comme l'approximation des solutions de distribution spectrales très localisées.

2) Toute recherche de solutions basée sur une méthode harmonique suppose des équations linéaires.

3) Enfin l'approximation de l'enveloppe peut être présentée sous l'aspect de l'approximation des couplages faibles pour certaine forme d'équations différentielles. Ainsi pour les opérateurs de degré 2 de type d'alembertien par exemple :

$\Box$ peut s'écrire comme le produit de 2 opérateurs de degré 1

$$\Box = \tilde{P}.\, P$$

avec

$$P = \partial_t + c\, \partial_z$$

$$\tilde{P} = \partial_t - c\, \partial_z$$

Dans le cas où le second membre est nul l'équation se réduit à

$$\Box\, \delta\rho = 0$$

avec

$$\rho = A \cos\xi$$

l'équation s'écrit

$$\tilde{P}\,[PA \cos\xi - A \sin\xi\, P\xi] = 0.$$

on peut alors limiter l'espace des solutions et écrire

$$P\,A\cos\xi - A\sin\xi\;\; P\xi = 0.$$

ce qui nous donne 2 équations en projettant sur cos ξ et sin ξ

$$P\,A = 0$$
$$P\,\xi = 0.$$

on a réduit le degré du système sans négliger aucun terme
Dans le cas d'un premier membre à ordre de dérivée inhomogéne par exemple

$$(\partial_t{}^2 + \omega^2_{rsq})\;\delta = 0.$$

On ne peut décomposer cette opérateur en 2 opérateurs du 1° ordre et donc la notion d'approximation des couplages faibles disparait.
En reprenant les équations, que SAULS se propose de réduire par l'approximation de l'enveloppe soit

$$(\partial_t{}^2 - e^2\partial_z^2)\;\delta\rho = K'\;\partial_z^2\;(\delta')\;e^{-t/\tau}$$

$$\partial_t{}^2\,R' - \frac{R'}{\tau^2} = 4\,K\,\partial_t\,(\partial_t\,(\delta\rho)\;\delta').$$

$$\partial_t{}^2\,\delta' + \omega^2_{rsq}\;\delta' = -K\;\partial t\;(\delta_t(\delta\rho)\;R').$$

On remarque pour la premiére équation un membre d'alembertien et pour les 2 autres équations un premier membre d'ordre de dérivée non homogène comme présenté ci-dessus avec des termes de couplages (2° membre) non linéaire.

Malgré le caractère assez arbitraire cette approximation elle va me permettre de débuter l'étude non linéaire.

Il n'y a pas de méthode établie pour l'étude générale de systèmes d'équations aux dérivés partielles non linéaires et l'on va essayer quand cela est possible de dégager des grandeurs caractéristiques des équations considérées. On parlera ainsi d'équation de conservation de surface, de l'énergie ou du calcul de la vitesse de propagation.

L'étude se fera en 2 étapes le cas homogène présenté par SAULS puis l'étude des équations lorsque l'on introduit une atténuation et une inhomogénéité. Les équations étudiées le seront toujours dans le cadre de l'approximation des phases

stationnaires et des solutions à la résonnance soit les équations introduites au paragraphe ID. Toute l'étude analytique se fera à atténuation nulle pour simplifier les expressions.

222 Cas homogène

Les équations sont celles données par SAULS d'après ID

$$(\partial_E + c\,\partial_z)\,\tilde{A} = -\alpha\tilde{E}$$

$$\partial_t E = -\tilde{A}\,R'$$

$$\partial_t R' = \tilde{A}\,\tilde{E}$$

Ce qui peut s'écrire, également

II G

$$1 \quad (\partial_t + c\,\partial_z)\,\tilde{A} = -\alpha \sin\sigma$$

$$2 \quad \sigma = \partial_t A.$$

2221 Régime petits signaux

Le système se réduit alors à :

II H

$$1 \quad (\partial_t + c\,\partial_z)\,A = \alpha\sigma$$

$$2 \quad \sigma = \partial_t A.$$

J'introduis la quantité $\phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\,dt$

Soit $\emptyset(z) = \sigma(z, \infty)$.

qui représente la surface de l'impulsion à la cote z.

en replaçant dans IIH1 on a

$$c\,\partial_z\,\emptyset(z) = -\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(z,t)\,dt.$$

Seules les surfaces $\sigma(z) = 0$ sont stables et ne sont pas atténuées. Toute surface positive fait diverger le système et l'on sort de l'approximation petits signaux.

De la même façon on met en évidence le comportement énergétique de l'onde

On introduit

$$\varepsilon(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(z,t)\, dt$$

Soit l'énergie qui a transité à la côte z pendant toute l'expérience.

On reprend II H 1 on a alors en multipliant membre à membre par A

$$(\partial_t + c\,\partial_z)\, A^2 = -2A\alpha\,\sigma$$

soit

$$\partial_z\, \varepsilon(z) = -\alpha\,\phi^2$$

Les seules solutions stables dans le système sont les solutions $\phi(z) = 0$ l'énergie est alors constante pendant toute la propagation.

Si l'on restreint encore l'ensemble des solutions en les supposant invariantes par translation l'équation II.4 se réduit à :

$$\text{II. I} \qquad v\,(c-v)\,\sigma'' + \alpha\sigma = 0.$$

Les solutions du système sont du type

$$\sigma = B_o \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{v\,(c-v)}}\, t\right)$$

avec B_o = constante.

elles sont compatibles avec la contrainte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\, dt = 0$$

mais de correspondent à rien d'observable.

Remarque :

La solution $v = c$ correspond à la solution triviale

$$A = 0 = \sigma.$$

2222 Régime forts signaux : cas non linéaire

Les équations s'écrivent dans ce cas

$$(\partial_t + c\partial_z)\, A = -\alpha \sin\sigma$$

$$A = \partial_t \sigma$$

Comme précédemment on va essayer de dégager des grandeurs caractéristiques. Commençons par la loi des aires.

Loi des aires

Comme précédemment

$$\phi(z) = \sigma(z,\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\,(z,t)\, dt$$

IE G 1 implique en intégrant membre à membre

$$c\,\partial_z\, \phi(z) = -\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\, \sigma(z,t)\, dt$$

on ne recherche que des solutions localisées et donc

$$\partial_z\, \phi\, (z) = \frac{-\alpha}{c} \left| \int_{-s}^{+s} \sin\, \sigma(z,\, t)\quad dt \right|$$

avec $(-s, + s)$ support de la solution .

On retrouve la condition de stabilité des petits signaux

$$\phi(z) = 0$$

Pour les forts signaux les surfaces stables dans la propagation sont celles qui annulent $\sin\, (\, \sigma(z,t))$ soit

$$\phi(z) = 2k\pi\ ,$$

pour des solutions symétriques positives, comme celles de type sine gordon.

Les solutions $\phi(z) = (2k+1)\pi$ ont une attenuation finie et sont donc instables.

Toute impulsion de surface $\phi(z = 0)$ différente de $2k\pi$ tend vers la solution de surface $2k\pi$ la plus proche "immédiatement".

Remarque :

Je n'ai pas réussi à dégager une loi des aires générale pour les systèmes homogènes. Il semblerait que l'introduction de l'inhomogénéité soit indispensable (2)

Conservation de l'énergie

On a comme précédemment

$$\varepsilon(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 dt$$

d'après l'équation II.4 , il vient :

$$\partial_z \varepsilon(z) = \frac{-2\alpha}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} A \sin \sigma(z,t)\, dt$$

Je ne peux expliciter l'intégrale plus clairement mais en supposant les solutions localisées dans le temps l'intégrale à une valeur finie quelque soit la surface ϕ
Le signe de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} A \sin\sigma\, dt$

est toujours positif si A est toujours positif.
L'énergie decroit donc lors de sa propagation dans le milieu.

Caractérisation des solutions énergétiquement stables

Elles sont obtenues pour

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A \sin\sigma \, dt = 0.$$

en gardant l'hypothèse A toujours de même signe et des solutions localisées et les seules solutions énergétiquement stables sont celles telles que

$$\phi(z) = 2 k\pi$$

Le point $(2k + 1)\pi$ corrrespond en fait à un point de dissipation maximale.

Forme des solutions stables $\phi(z) = 2k\pi$

Une solution possible est la solution soliton type sine-gordon (5).
l'expression de cette solution ainsi que celle de la vitesse de propagation est donnée chapitre I paragraphe 3.

223 Système inhomogène

L'étude du comportement des solutions aux équations proposées par Sauls ne parait pas satisfaisante. En se référant à l'article de Mc Call et Hahn et aux observations expérimentales sur ^{3}He-B notamment celles concernant la largeur de raie L'introduction d'un terme d'inhomogénéité peut peut-être améliorer les choses.

Notre connaissance du superfluide ne permet pas de justifier à priori l'introduction d'un terme d'inhomogénéité Il ne s'agit donc que d'une tentative de symétrisation des équations du superfluide avec celles proposées par Mc Call et Hahn dans le rubis.

L'étude analytique en devient complexe.

On se réfèrera à l'article de Mc Call et Hahn (2) pour une première approche du problème. Les termes dissipatifs y sont négligés et l'aire de l'enveloppe du signal toujours définie par :

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(z,t)\, dt$$

On montre alors que $\phi(z)$ obéit à l'équation suivante :

$$\frac{d\,\phi(z)}{dz} = -\frac{1}{2}\,\alpha \sin \phi(z) \ .$$

Dans le cas petits signaux l'énergie de l'impulsion décroit exponentiellement avec la distance suivant

$$\varepsilon(z) = \varepsilon(0)\, e^{-\alpha_a z}$$

je rappelle que

$$\varepsilon(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(z,t)\, dt$$

Dans le cas général, on a

$$\phi(z) = 2\ tg^{-1} \left| (tg\ \frac{1}{2}\,\theta) \exp\ (-\frac{1}{2}\,\alpha_a\ z) \right| \ .$$

Comme dans le cas homogène l'aire tend vers la valeur $2k\pi$ la plus proche. Cependant l'introduction de l'inhomogénéité a permis de mettre en évidence une loi des aires générale, c'est-à-dire variant continuement.

On définit de même une loi de conservation de l'énergie

$$\frac{d\,\varepsilon}{dz} = -\,K\,\varepsilon\,F(A,\ \varepsilon,\ \text{forme de la courbe})$$

Mc Call et Hahn ont vérifié numériquement comme dans le cas homogène que les conditions de stabilité énergétique, soit

$$\frac{d\,\varepsilon}{dz} = 0.$$

sont à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\, dt = 2k\pi$$

avec une atténuation maximale pour les surfaces de $(2k+1)\pi$

Enfin le cas inhomogène présente également la possibilité d'une solution soliton de type sine gordon.
Les cas homogène et inhomogène sont donc semblables pour les solutions stables.

Dans le cas d'une solution de surface quelconque comme le montrera le calcul machine, les solutions homogènes sont plus localisées et développent des parties négatives importantes alors que d'après le calcul présenté en référence 2 fig. 1 b et la les solutions ont unepartie négative très faible et sont plus larges.

II3 Solutions proches de l'expérience

Les informations apportées par les études analytiques sont insuffisantes. Pour se rapprocher de l'expérience j'ai réalisé un programme de résolution numérique des équations non linéaires.

31 Présentation du calcul numérique

Devant la complèxité du calcul j'ai utilisé le système simplifié présenté en ID en y ajoutant l'atténuation

Les approximations faites sont donc les suivantes : 1) approximation de l'enveloppe, 2) système à la résonance , 3) phase stationnaire.

La réalisation du programme ainsi que l'étude de la stabilité de celui-ci est décrit en annexe III.
Le programme réalisé il me fallait le vérifier j'ai utilisé pour cela le calcul analytique précédemment exposé.
Le premier critère à satisfaire est que la propagation d'un soliton

à atténuation nulle - c'est à dire un soliton 2π - doit correspondre à celle calculée. Le second critère est que dans le cas d'une excitation échelon la valeur de l'atténuation en régime permanent petit signaux doit correspondre au calcul en régime harmonique.

Les résultats calculés correspondent aux résultats analytiques avec un écart inférieur à 5%. Le choix des constantes du calcul soit α, c et τ s'est effectué d'abord à partir des valeurs de SAULS puis à partir des chiffres expérimentaux corrigés (voir chapitre III) j'ai pris ainsi $c = 375{,}1$ m/s soit la valeur à 24 bar donné par Wheathey (6) alors que α et τ et varient de $1{,}5\ 10^{10}$ à $1{,}510^{11}$ et 3 µs à 30 µs.

L'allure des courbes varie peu dans ces domaines. Les calculs proposés ici ont été effectués avec $\alpha = 1{,}510^{11}$ et $\tau = 3$ µs soit une valeur du coefficient de couplage de près de 10 fois plus grande que celle proposée par SAULS.

Je vais maintenant décrire le comportement du système en présence d'atténuations. Une analyse plus détaillée sera faite au chapitre suivant .

32 Présentation des solutions

Le comportement de l'impulsion peut se résumer par la figure 3 qui décrit l'évolution de la surface normalisée à 2π en fonction du temps de retard du maximum par rapport à une impulsion identique voyageant à la vitesse du son. Les points sont pris à intervalles réguliers sur les 3,24 mm de propagation .

On retrouve la tendance de propagation stable aux point $2k\pi$ comme dans le cas homogène et inhomogène et les points de dissipation maximale à $(2k + 1)\pi$
L'atténuation rend les solutions instables mais son influence

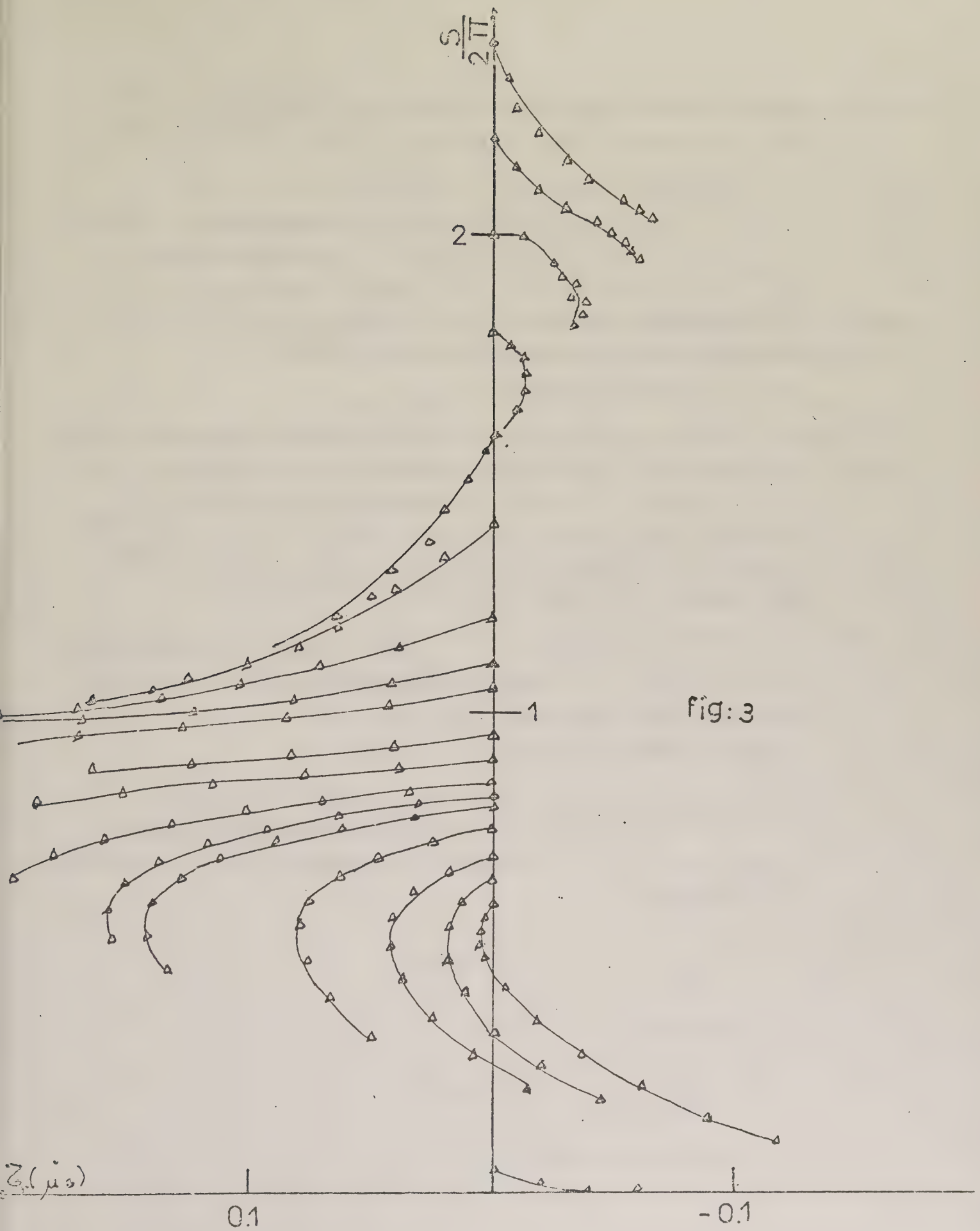


fig: 3

est très faible sur les 3,24 mm de l'expérience. On peut pour s'en rendre compte regarder le comportement du signal à $\frac{\text{surface}}{2\pi} = 1$

J'ai introduit une grandeur algebrique τ_r temps de retard du point du maximum ainsi τ_r positif correspond à une vitesse inférieure à c, τ_r négatif correspond à une vitesse supérieure à c . A la lecture des courbes on peut remarquer que la formation des solitons 0π et 4π. ont des vitesses supérieures à c.

Ce phénomène qui n'est pas observé expérimentalement correspond dans notre cas à la formation de plusieurs arches indépendantes. La vitesse étant mesurée par rapport à la première arche celle-ci se trouve animée d'une vitesse supérieure à c de part la vitesse relative qu'elle possède par rapport au " barycentre " de l'impulsion.

Le soliton $2 \times 2\pi$ tend à créer 2 solitons alors que le soliton 0π créé plusieurs arches (3) (4) la vitesse est donc plus importante dans le cas 0π .
On peut séparer le graphe en 3 zones.

1) Les zones centrées autour des points $2 \times 2\pi$ et 0π
τ_r est négatif la vitesse de la première arche est supérieure à c le phénomène prépondérant est l'étalement de l'impulsion

$\left.\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_{\tau=0}$ est faible

2) Les zones π et 3π

$\left.\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_{\tau=0}$ est maximum

La vitesse est inférieure à c.

3) La zone 2π d'atténuation faible et de vitesse inférieure à

$$\left.\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_{\tau=0} = 0$$

seule l'atténuation due au temps de relaxation subsiste on peut remarquer son influence très faible à l'échelle de l'expérience.

Les points de rebroussement représentent le passage d'une impulsion d'une zone à l'autre de par l'atténuation

Le phénomène de saturation du milieu, n'est pas visible, sur la figure 3. Il apparaît pour des surfaces de 8 à $15 \times 2\pi$: le signal se propage alors sans être atténué à l'échelle du calcul.

Pour en terminer avec les aspects qualitatifs du calcul machine, on peut remarquer fig 4 et fig 5 dans le cas $n = 8$ et $n = 15$ qu'une impulsion de surface $n \times 2\pi$ tend à former n solitons 2π.

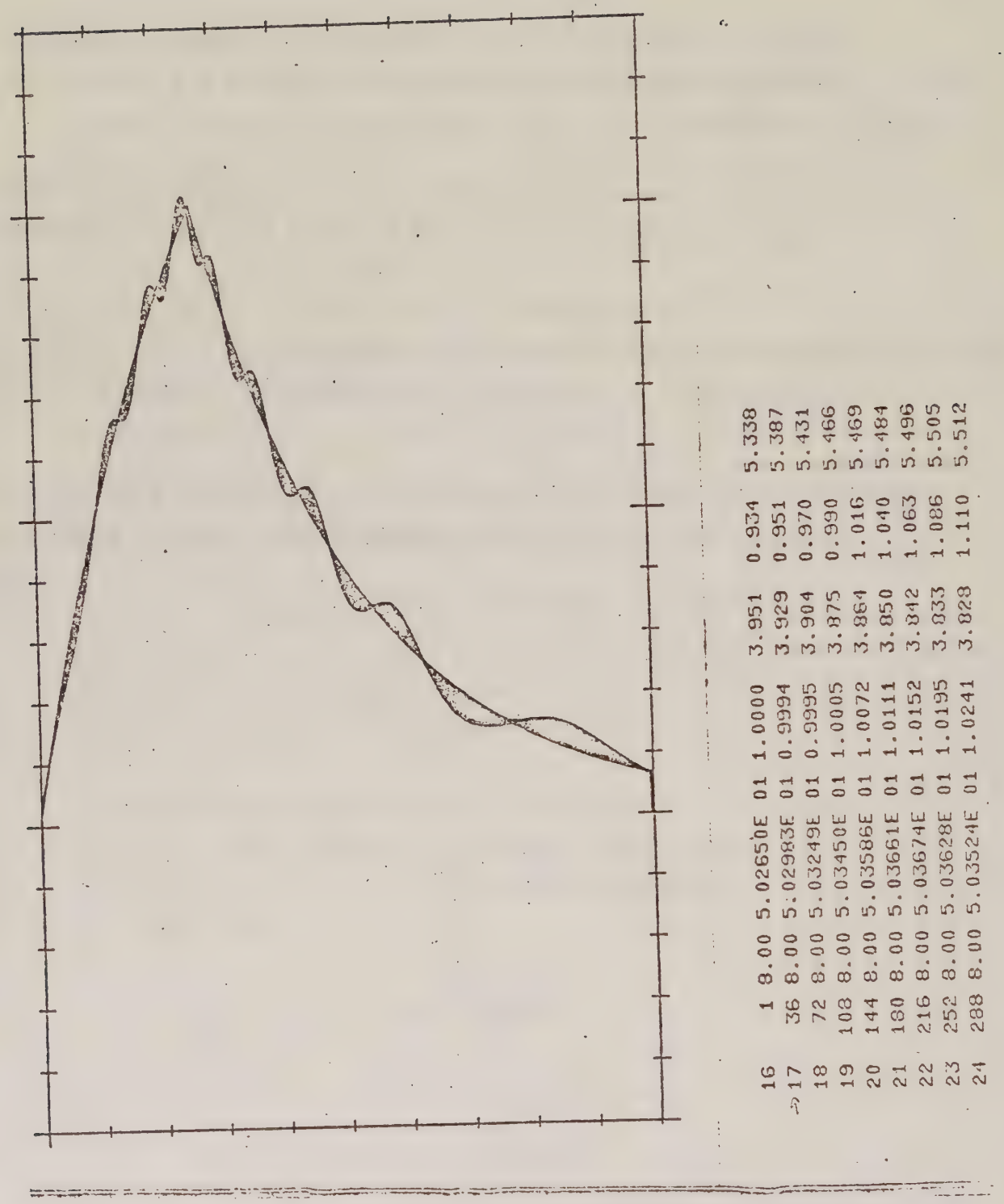
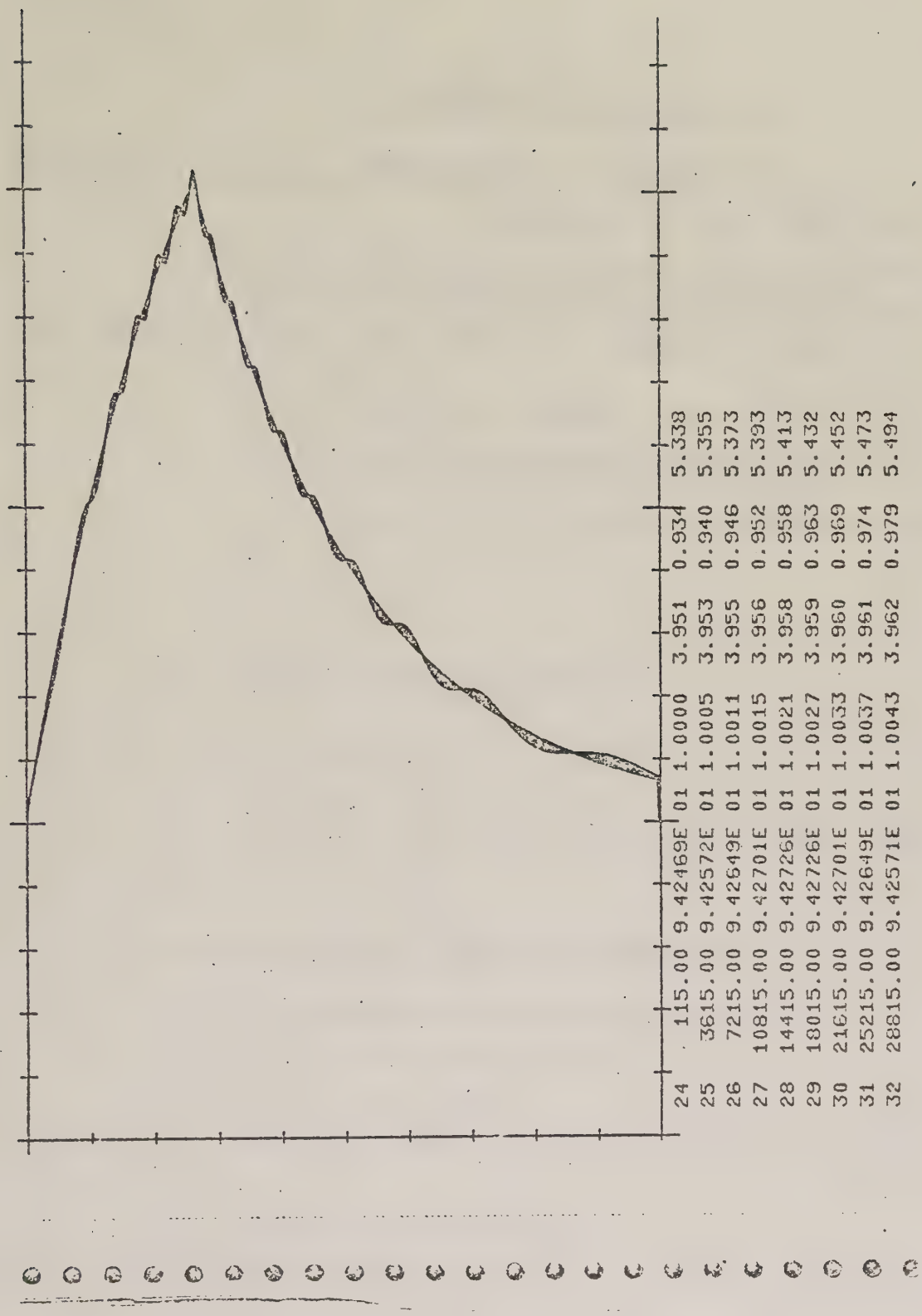


Fig. 4 : Impression successives de la déformation d'une impulsion de surface 8 × 2π on remarque la découpe de 8 solitons.



24	115.00	9.42469E	01	1.0000	3.951	0.934	5.338
25	3615.00	9.42572E	01	1.0005	3.953	0.940	5.355
26	7215.00	9.42649E	01	1.0011	3.955	0.946	5.373
27	10815.00	9.42701E	01	1.0015	3.956	0.952	5.393
28	14415.00	9.42726E	01	1.0021	3.958	0.958	5.413
29	18015.00	9.42726E	01	1.0027	3.959	0.963	5.432
30	21615.00	9.42701E	01	1.0033	3.960	0.969	5.452
31	25215.00	9.42649E	01	1.0037	3.961	0.974	5.473
32	28815.00	9.42571E	01	1.0043	3.962	0.979	5.494

Fig. 5 : Même commentaire qu'à la figure 4, pour une surface 15 × 2π.

II4 Références du chapitre II

1. O. Avenel, L.Piché, W.M. Saslow, E.Varoquaux, R.Combescot- Phys.rev. let. 47 (1981) 803
2. Mc Call, E. l. Hahn Phys. rev. 183 (1969) 457
3. M.D.Crisp Phys. rev. A 1 (1970) 1604
4. F.A.Hopf, G.L.Lamb, C.K. Rhodes, M.O. Scully - Phys. Rev. A3 (1971) 758
5. Sauls-Physreview letters - 47 (1981) 530
6. Wheathey Prog in low temp.phys.(1978) 191

CHAPITRE III

Comparaison à l'expérience

III1 Présentation quantitative du superfluide

11. Gap BCS
12. Transition de phase
13. $|c_o - c_1|/c_o$
14. Temps de relaxation du superfluide
15. Coefficient de couplage du mode real squashing
16. Article de cornell
17. Remarque

III2 Modèle proposé par Sauls

21 Calcul de α
22 Caldul de η
23 Comparaison des calculs avec l'expérience
24 Conclusion

III3 Influence du temps de relaxation

31 Conditions expérimentales
32 Cas des petits signaux
33 Cas non linéaire
34 Calcul des énergies nécessaires à la TSI

III4 Cas de l'inhomogénéité

III5 Conclusion

51. Arguments quantitatifs
52. Arguments qualitatifs
53. Remarque sur l'établissement d'un modèle amélioré

III6 Références du chapitre III

Il s'agit maintenant de confronter les résultats de mes calculs à l'expérience.

III1 Présentation quantitative du superfluide en phase B

11 Gap

La théorie BCS donne une expression du gap de la forme $\Delta(T) \simeq \Delta(0)\, f\ (T/T_c)$
avec T_c température de transition superfluide.

On a par ailleurs $\Delta(0) = 1.764\ k_B T_c$.
On a donc tracé $\frac{\Delta(T/T_c)}{\Delta(0)}$ en fonction de T/T_c.

ainsi que $\frac{d[\Delta(T/T_c)/\Delta(0)]}{d\ (T/T_c)}$. La courbe est présentée fig 1.

12 Température de transition de phase

Le diagramme de la transition de phase normal superfluide n'est pas connu exactement; plusieurs groupes ont trouvé des résultats différents.

Les courbes indiquées figures 2 représentent la transition de phase en diagramme pression-température mesurée par différents groupes (ORSAY, Helinski et OSU).
On utilisera pour la détermination de T_c la 2ème échelle d'Helsinki, comme Sauls.

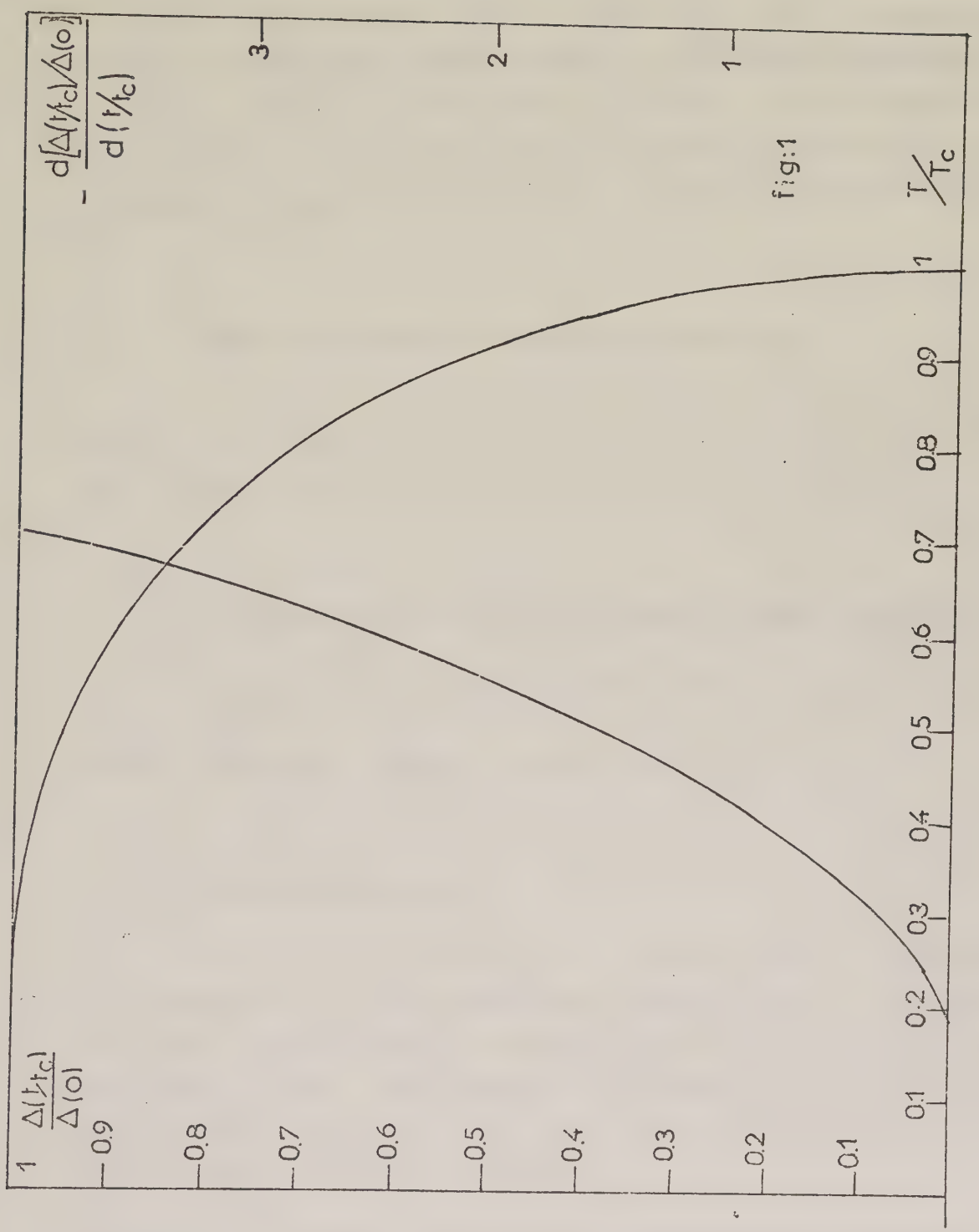

1
$\frac{\Delta(t/t_c)}{\Delta(0)}$
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
$\frac{T}{T_c}$
$-\frac{d[\Delta(t/t_c)/\Delta(0)]}{d(t/t_c)}$
3
2
1

fig:1

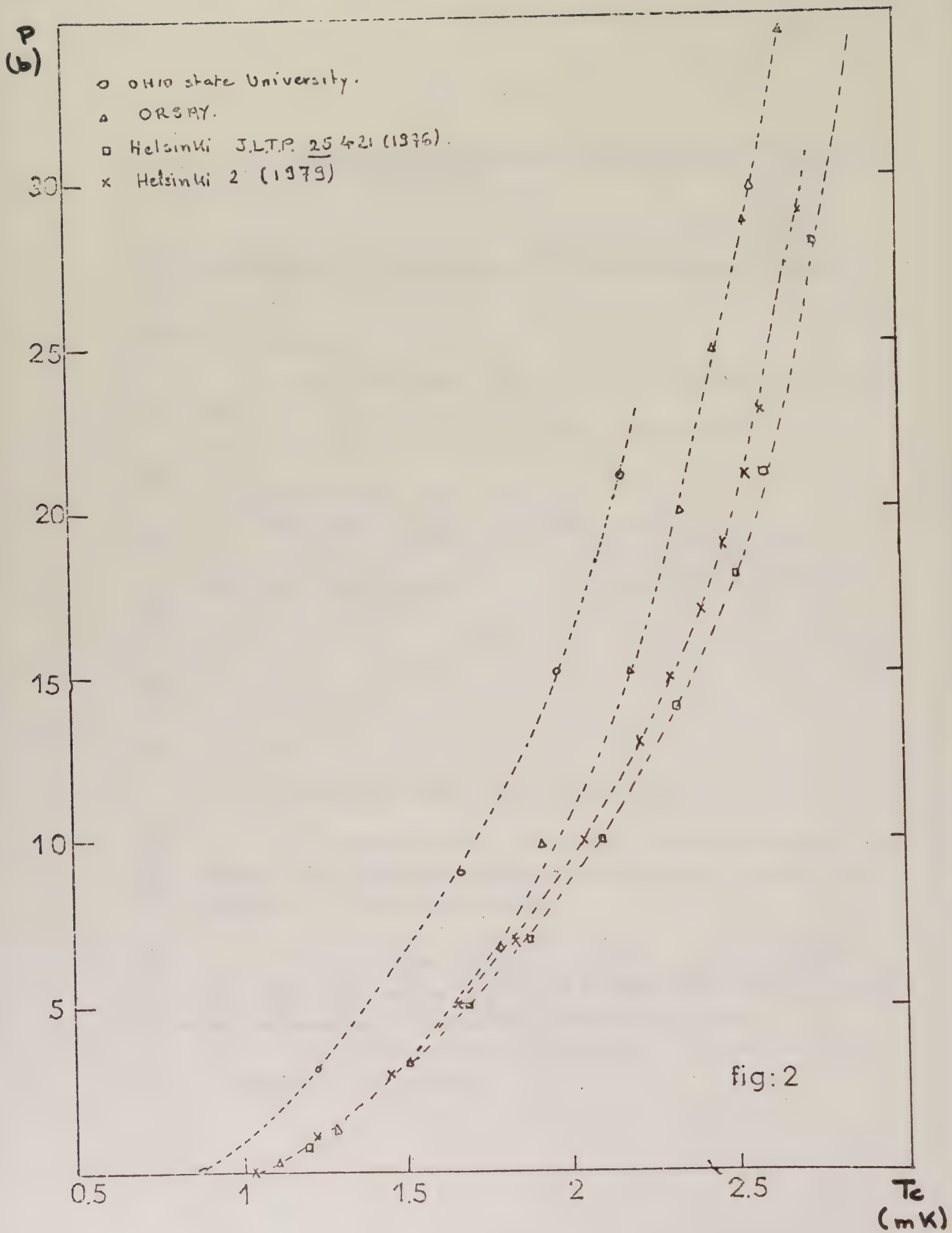

P (b)
o OHIO state University.
Δ ORSAY.
□ Helsinki J.L.T.P. 25 421 (1976).
× Helsinki 2 (1979)
30
25
20
15
10
5
0.5
1
1.5
2
2.5
Tc (mK)

fig: 2

13 $\frac{c_o - c_1}{c_1}$ fonction du volume molaire : fig.3

On a tracé $\frac{c_0 - c_1}{c_1}$ avec c_0 et c_1 vitesse du zéro et premier son respectivement en fonction du volume molaire (échelle linéaire sur la figure). La correspondance volume molaire et pression est donnée en abscisse par une double échelle. Les résultats ont été partiellement mesurés à ORSAY ou tirés de publications.

14 Temps de relaxation du superfluide fig.4

Mesuré à Northwestern cette courbe donne le temps de relaxation des quasi particules τ en fonction de T/T_c les mesures ont été effectuées à 13 et à 14,2 bar (1)

15 Coefficient du couplage du mode de real squashing

Mesuré à 13 bars à NORTH WESTERN ce coefficient vaut 7.10^{-6}
mesuré à 3 bars à ORSAY il vaut $2,7\ 10^{-6}$.

16 Article de Cornell

C'est cet article qui introduit pour la premièrefois le concept de soliton acoustique dans la phase B. Les arguments utilisés sont la forme du signal reçu et l'allure de l'atténuation du signal (les figures principales de cet article ont été reproduit fig 51, 52, 53). Sauls y fait référence et les utilise pour ses conclusions.

Remarque : De tous les résultats expérimentaux présentés seules les valeurs de temps d'arrivée du signal soit la courbe

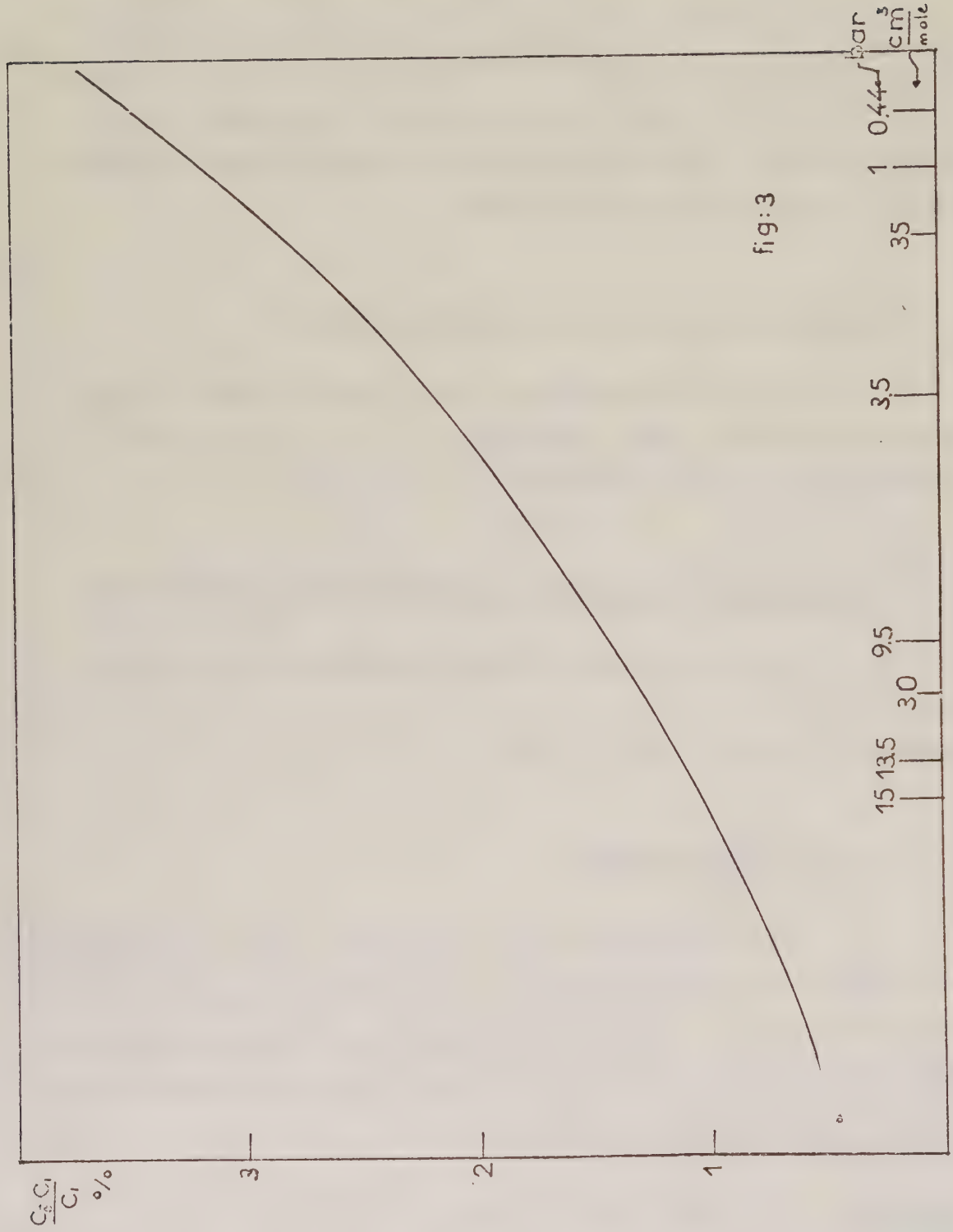


fig: 3

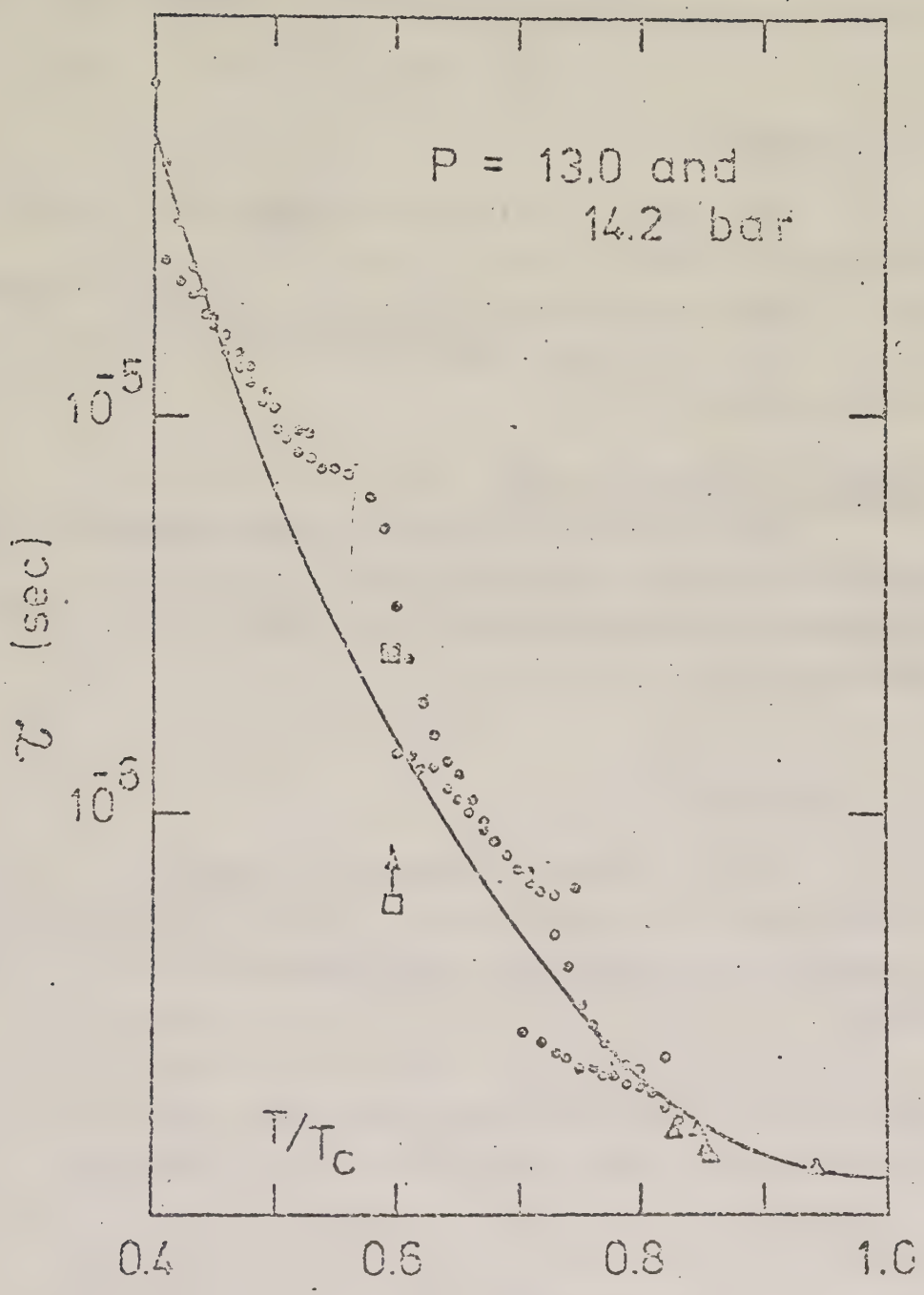


Fig. 4 : Temps de relaxation du superfluide mesuré à 13 et à 14, 2 bars pour diverses valeurs de T/T_c dans la phase B.

v/c peut être considérée comme exactes.

Car, les mesures ont été effectuées sans deconvoluer le signal de la fonction de transfert du quartz (2).

17 Remarque

Dans toute la suite de ce chapitre on se placera à une pression de 24 bars et dans la zone de $T/T_c < 0,4$.
Soit τ temps de relaxation des quasi particules compris entre 3 µs et 30 µs (on supposera la variation de τ faible avec la pression).

2. Modèle proposé par Sauls

Pour comparer ses calculs avec l'expérience Sauls présente un certain nombre de données numériques :
Il s'agit de les vérifier et de les replacer dans un contexte expérimental plus exact.

21. Calcul de α

Dans la théorie présentée par Sauls α correspond au coefficient de couplage entre le terme propagateur de l'onde de densité et les variables caractérisant l'état du paramètre d'ordre.

Par définition

$$\text{III.A} \qquad \alpha = \frac{KK'\ \omega^2}{4^2}$$

Or dans son article Sauls pose

$$\alpha = \frac{4}{15}\ \lambda_S(\eta\omega\ \frac{v_F}{c})$$

En remplaçant K et K' par leur valeur dans IIIA on a

$$\alpha = \frac{8}{5} \frac{n\ \lambda_s \Delta\ \eta 2\ \eta\ \omega^2}{\Delta m\ N(0) 4\ c^2} = \frac{4}{5}\ \lambda_s (\eta\ \frac{\omega}{c})^2\ \frac{n}{m\ N(0)}$$

On a $v_F = \frac{\hbar\ k_F}{m^*}$ $N(0) = \frac{3}{2} \frac{n}{\varepsilon_F}$

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2\ k_F^2}{2m^*}$$

$$\alpha = \frac{4}{15}\ \lambda_s (\eta\ \frac{\omega}{c}\ v_F)^2\ \frac{m^*}{m}$$

il y a donc un facteur $\frac{m^*}{m}$ manquant dans la formule de base de ces calculs.

Or d'après Wheatley (4), à 24 bars ce paramètre vaut :

$$\frac{m^*}{m} = 5{,}39\ .$$

22 Calcul de η

La deuxième donnée numérique du calcul de Sauls est η expérimentale, paramètre qui mesure le degré de rupture de la symétrie particule-trou et qui s'obtient à partir de l'intensité expérimentale du mode de "real squashing".
En citant Koch et Wölfle (5) Sauls pose: à 24 bars $\eta = 4{,}1 \times 10^{-3}$

or Koch et Wölfle se faisaient citer des résultats expérimentaux obtenus à ORSAY et à 3 bars.

Pour calculer plus exactement η expérimental à 24 bars je vais comparer les résultats expérimentaux pris à 3 et 13 bars avec la formule théorique approximative donnée par Koch et Wolfle (5) et extrapoler une nouvelle valeur à 24 bars.

Pour cela j'utilise les 2 relations citées en ref (5)

III B 1 $$\lambda_{rsq} = \frac{2}{5} \lambda_s \left(\frac{c_0 - c_1}{c_1}\right) \times 20 \times \eta^2$$

2 $$\eta_{th} = \frac{\Delta}{2\varepsilon_F} \ln \left(\frac{\varepsilon_F}{10\Delta}\right).$$

λ_{rsq} est la constante de couplage mesurée à 3 et 13 bars par NORTHWESTERN et ORSAY respectivement. λ_s est le coefficient que Sauls appelle λ dans son article et le déclare proche de 1. Il se trouve valoir 1,2 d'après la référence (5).

La connaissance de λ expérimental à 3 et 13 bars permet de calculer par IIIB1.
η expérimental soit respectivement $3,49\ 10^{-3}$ et $7,8\ 10^{-3}$
Puis en utilisant IIIB2 on calcule η théorique en prenant les valeurs données par Wheatley (4) pour ε_F 3,13 et 24 bars on trouve respectivement 3,46, 5,24 et $6,510^{-3}$

le rapport $\frac{\eta_{exp}}{\eta_{th}}$ est alors égal à 1.04 et 1.55 pour 3 et 13 bars en extrapolant à 24 bars on prend $\frac{\eta_{exp}}{\eta_{th}} = 1,7$ soit $\eta = 11\ 10^{-3}$
En utilisant III B2 on trouve finalement $\lambda_{exp} = 7,78\ 10^{-6}$

23 Comparaison des calculs à l'expérience

En reprenant les calculs de Sauls avec ces nouvelles valeurs, on a

$$\alpha\ (\tau_p/\pi)^2 = 9,72\ 10^{-2}\ \tau_F^2$$

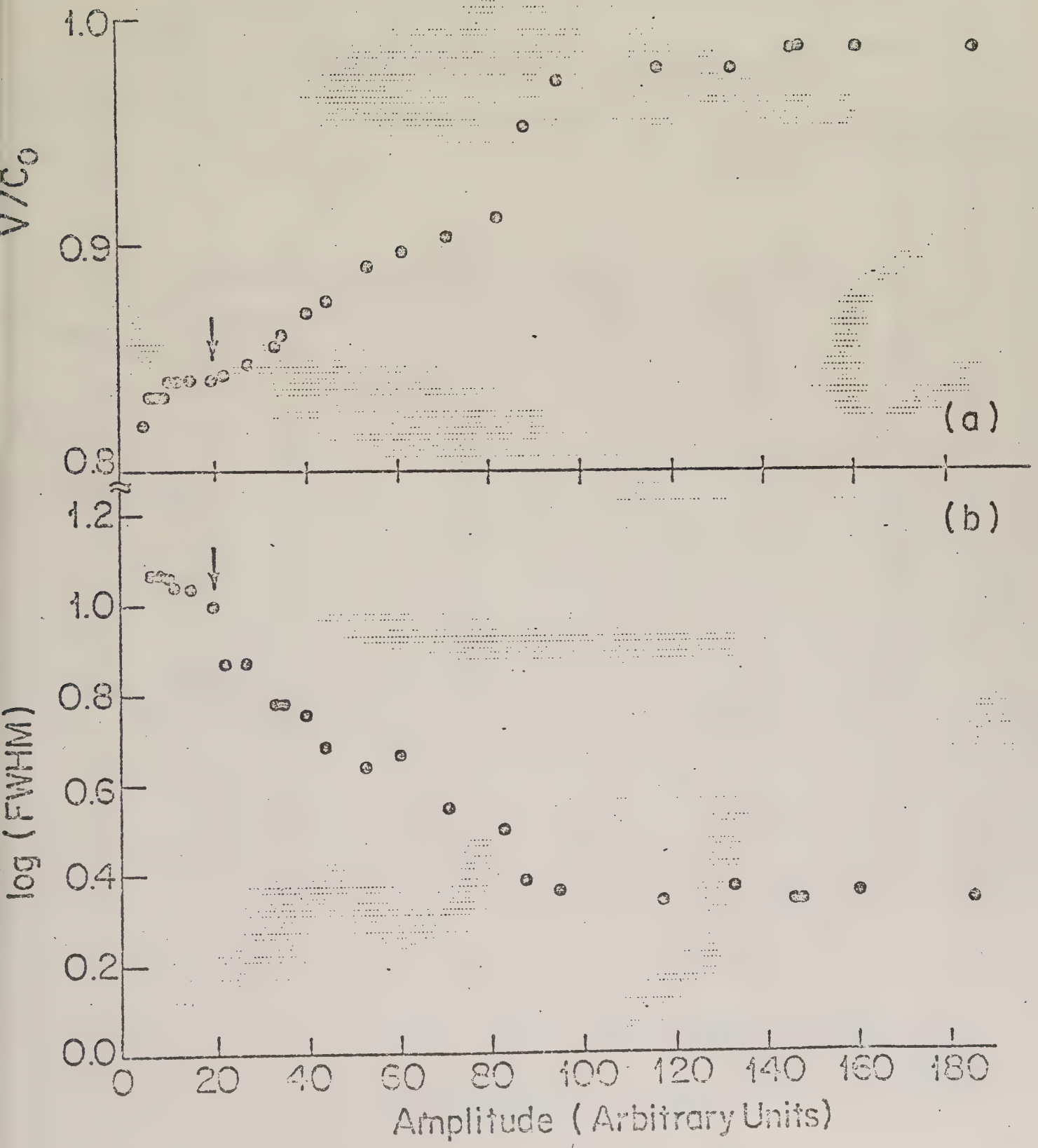


Fig. 5.1 : a) Vitesse de groupe de l'impulsion normalisée à la vitesse du zéro son en fonction de l'amplitude émise
b) Largeur à mi-hauteur de l'impulsion en fonction de l'amplitude émise.

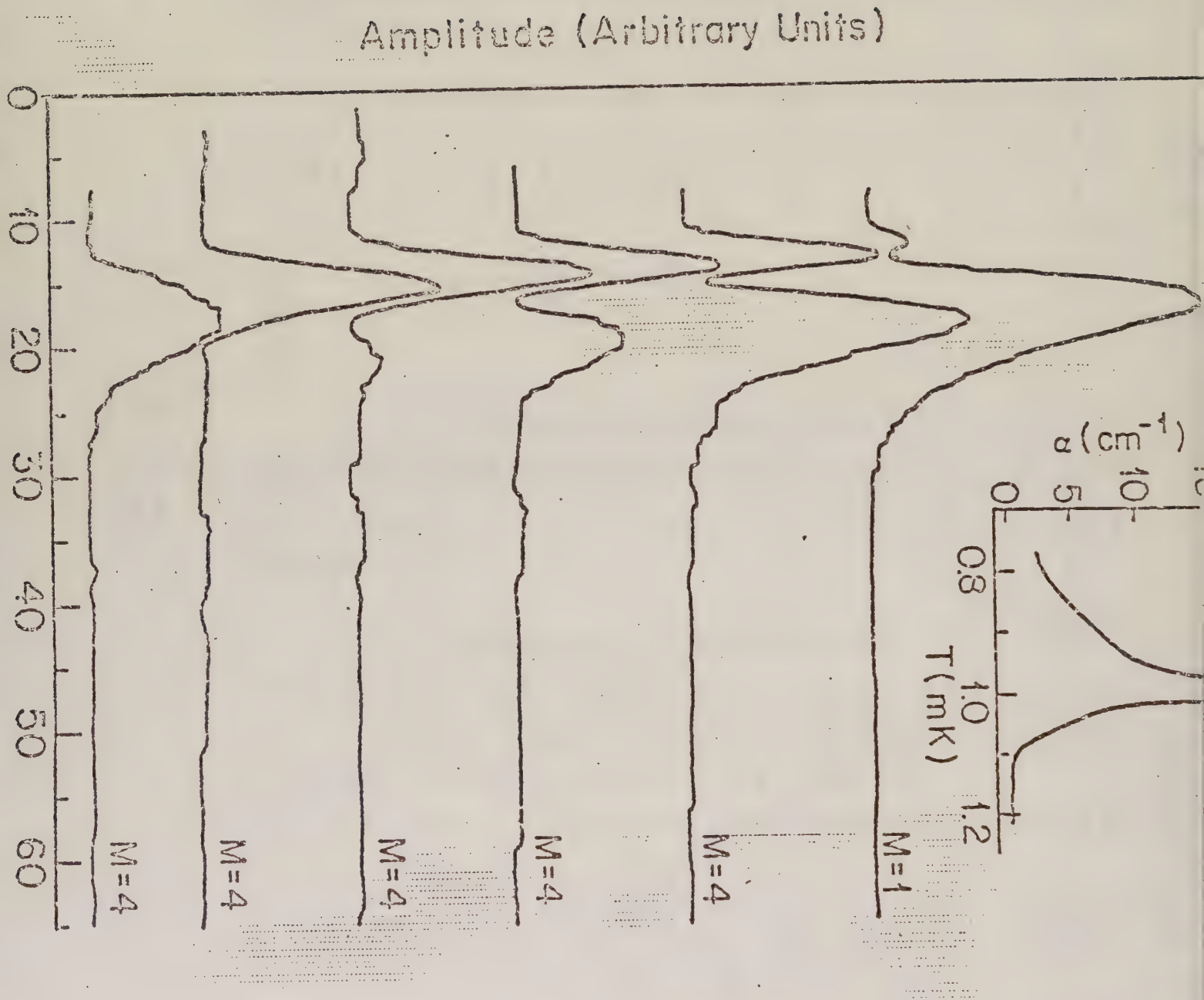


Fig. 5.2. :Signal reçu gradié en microseconde et multiplié en ordonnée par M facteur d'échelle.

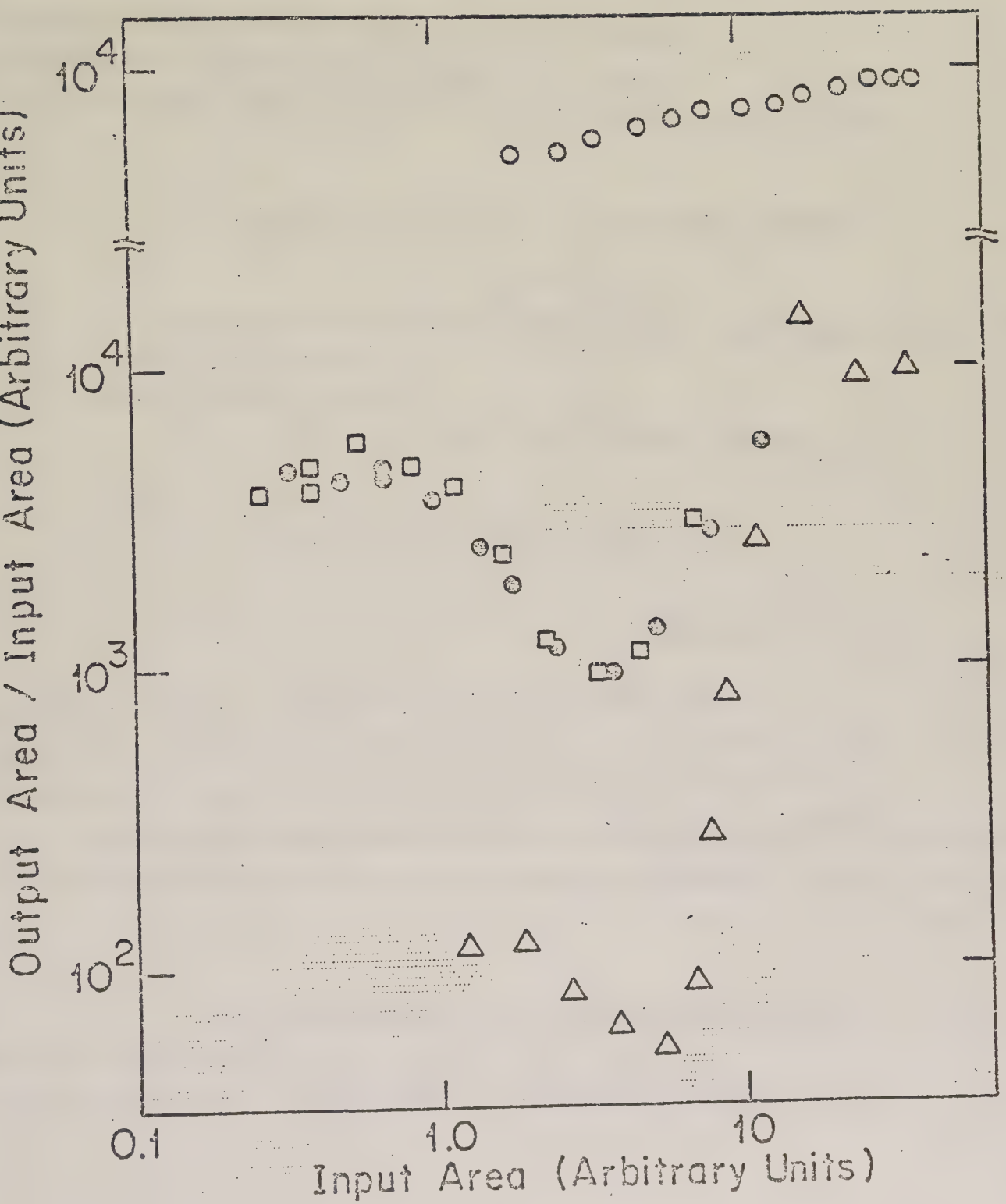


Fig. 5.3 : Surface du signal reçu normalisée à la surface émise en fonction de la surface émise.

avec τ_F en µs

La comparaison faite alors avec la pente expérimentale de $1{,}9 10^{-3}$ est maintenant grossièrement fausse. Le résultat trouvé est de cinquante fois supérieur alors que Sauls trouve 2.110^{-3}.

De même j'obtiens

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{1 + 9{,}72\ 10^{-2}\ \tau_F^2}$$

ce qui, pour une impulsion de 3 µs , conduit à

v/c = 0.53 au lieu de 0.98 pour Sauls

et pour une impulsion de 7 µs

à $\frac{v}{c}$ = 0.17 au lieu de 0.9 pour Sauls

24 Conclusion

Les valeurs de v/c dépendent de façon cruciale de η et de α . Sauls arrive à des résultats proches de l'expérience par l'utilisation deparamètres erronés. On voit après rectification le désaccord flagrant avec l'expérience où aucune mesure de v/c ne descend en dessous de 0.8 et où la pente $\frac{v}{c} = f(\tau_F)$ est 50 fois plus faible que celle calculée.

3. Influence du temps de relaxation

A 24 bars, les valeurs des paramètres qui correspondent à la situation expérimentale de Cornell sont les suivantes

C_o = 375,1 m/s

α = 6,77 10"

τ = 3 µs

$\frac{\omega}{2\pi}$ = 100 MHz

v_F = 34 m/s

$T_c = 2{,}6$ mK

$\frac{T}{T_c} < 0{,}3 \quad T < 0{,}78$ mK.

31 Cas du régime petits signaux non atténué

Les quantités sans dimension introduites dans l'équation IIE, c'est-à-dire :

$$a = 1 - \frac{\omega_{rsq}^2}{\omega^2} \quad , \quad b = \frac{1}{\tau\omega} \quad , \quad \chi = \frac{KK'\omega^2}{c_o^2}$$

prennent alors les valeurs suivantes :

$a = \simeq 0$

$b = 5\ 10^{-4}$

$\chi = 6{,}85\ 10^{-6}$

Dans le modèle sans atténuation on est dans la bande interdite $-\chi < a < 0$ proche de la résonance. On peut remarquer l'étroitesse de cette bande interdite qui fait 150 Hz pour F = 100 MHz.

32 Introduction de τ en régime petits signaux

En utilisant le modèle atténué on trouve :

$$\frac{c_\phi}{c} = \simeq 1$$

$$\alpha = 18 \text{ cm}^{-2}$$

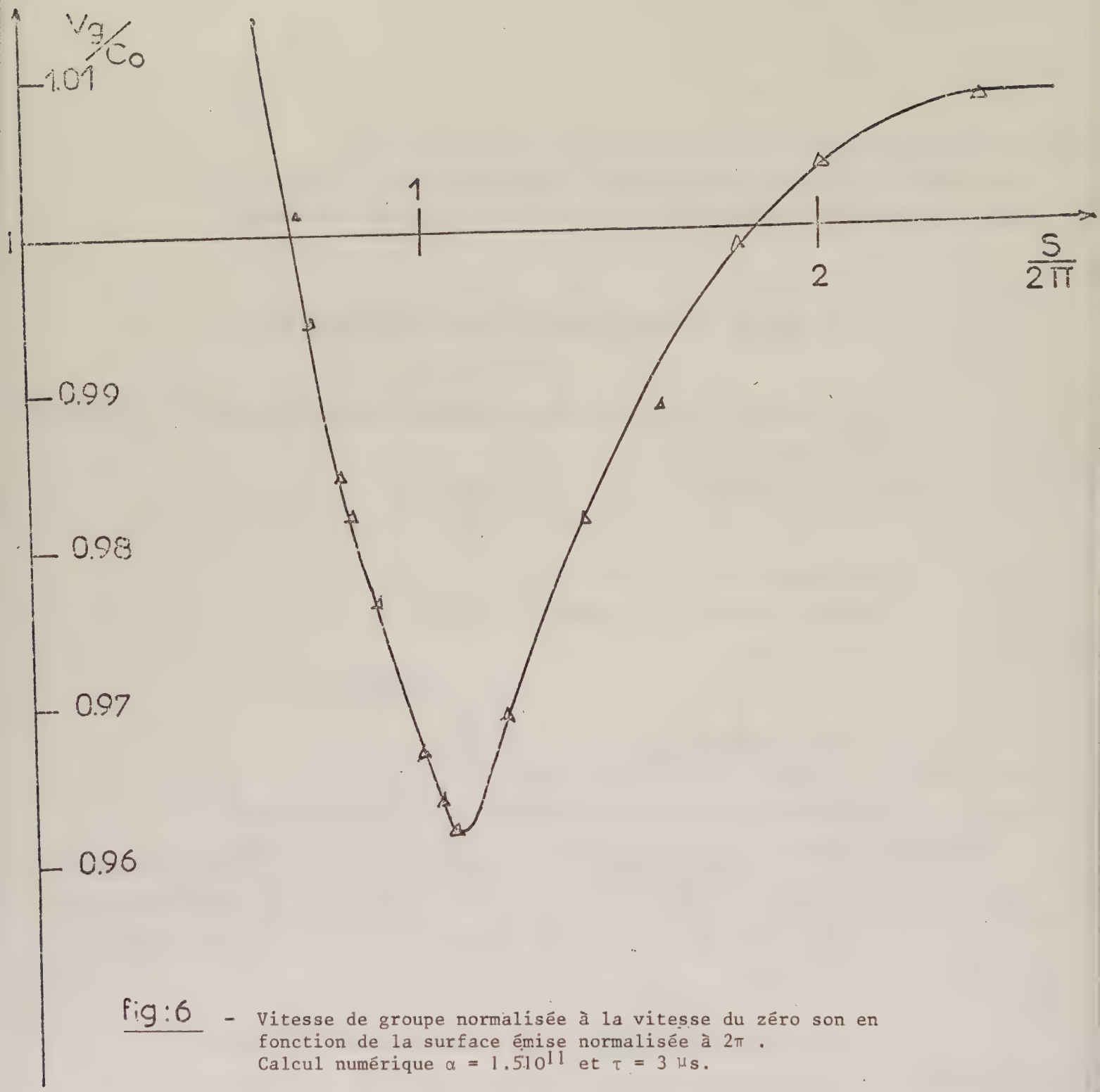


fig:6 - Vitesse de groupe normalisée à la vitesse du zéro son en fonction de la surface émise normalisée à 2π .
Calcul numérique $\alpha = 1.5 10^{11}$ et $\tau = 3\ \mu s$.

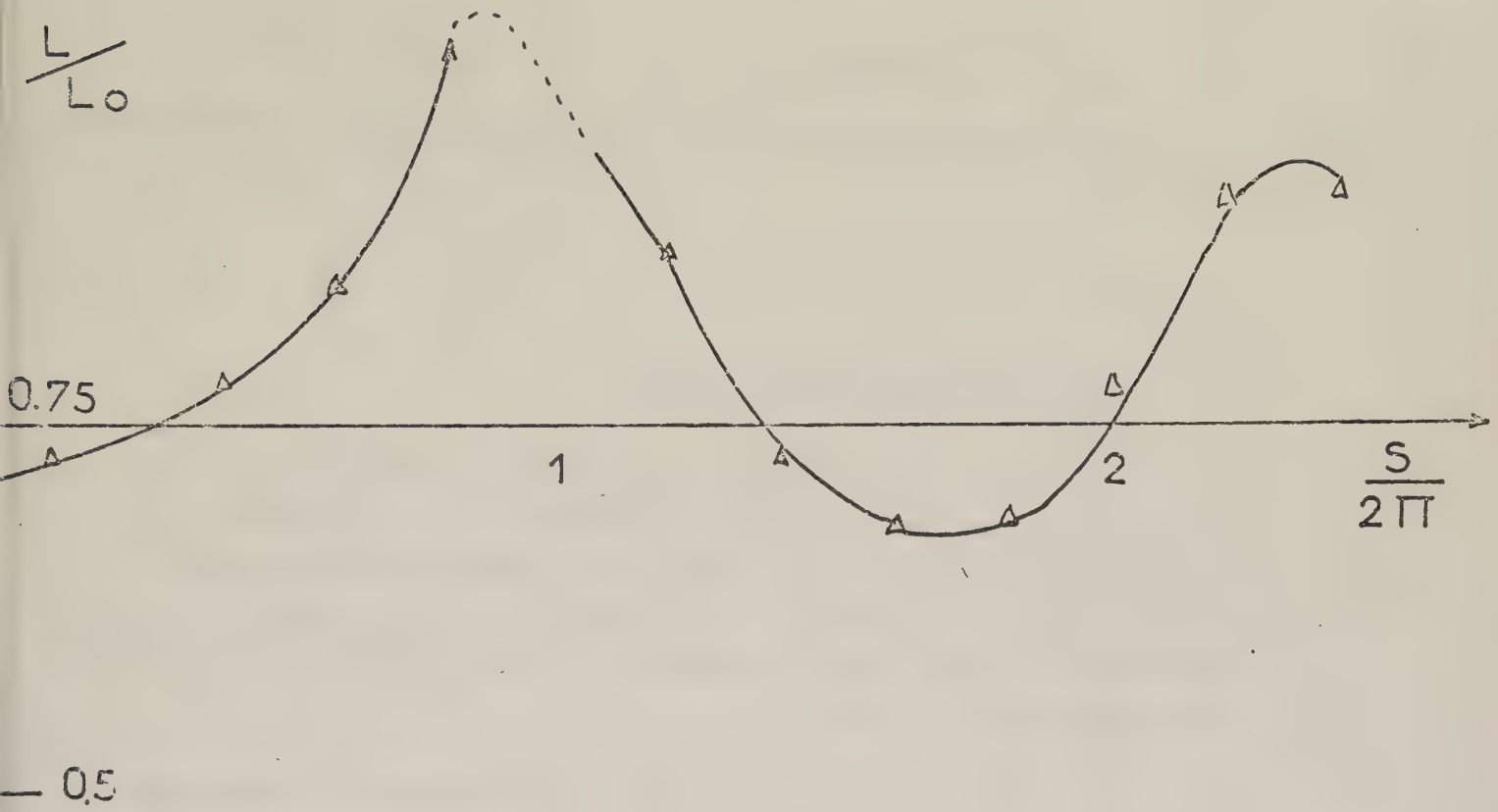


Fig. 7 : Largeur à mi-hauteur du signal reçu L, normalisée à la largeur du signal émis L_o en fonction de la surface de l'impulsion S normalisée à 2π . Calcul numérique avec $\alpha = 1.5 10^{11}$ et $\tau = 3$ µs.

Soit des résultats compatible avec les résultats experimentaux.

33 Cas du calcul non linéaire

Pour des amplitudes grandes on a tracé $c\phi/c_o$ en fonction de la surface initiale normée à 2π (fig.6) et la largeur de mi hauteur de l'impulsion reçue en fonction de la surface initiale normée à 2π (fig.7). $c\phi/c_o$ devient supérieur à 1 pour des surfaces initiales inférieures à $0.7 \times 2\pi$ et supérieures à $1,8 \times 2\pi$

On retrouve en fait le comportement de formation de plusieurs solitons dans le cas $2 \times 2\pi$ et de formation de branches multiples du soliton 0π .On a représenté en fig.8 et 9 respectivement l'allure des solutions obtenues par calcul numérique. Il s'agit en fait du même phénomène qui a été constaté fig. 3 chapitre II mais intégré sur 3,24 mm

Pour les surfaces de l'ordre de 2π on retrouve une vitesse de phase inférieure à c_o : c'est la propagation du soliton de type sine-Gordon. De même l'évolution de la largeur à mi-hauteur observable sur la figure 7 caractérise la scission en soliton multiple par rapport au seul phénomène d'atténuation de la surface

Remarque

On peut déjà comparer les courbes fig.6 et 7 obtenues par calcul machine et celles présentées par Cornell fig 5 .

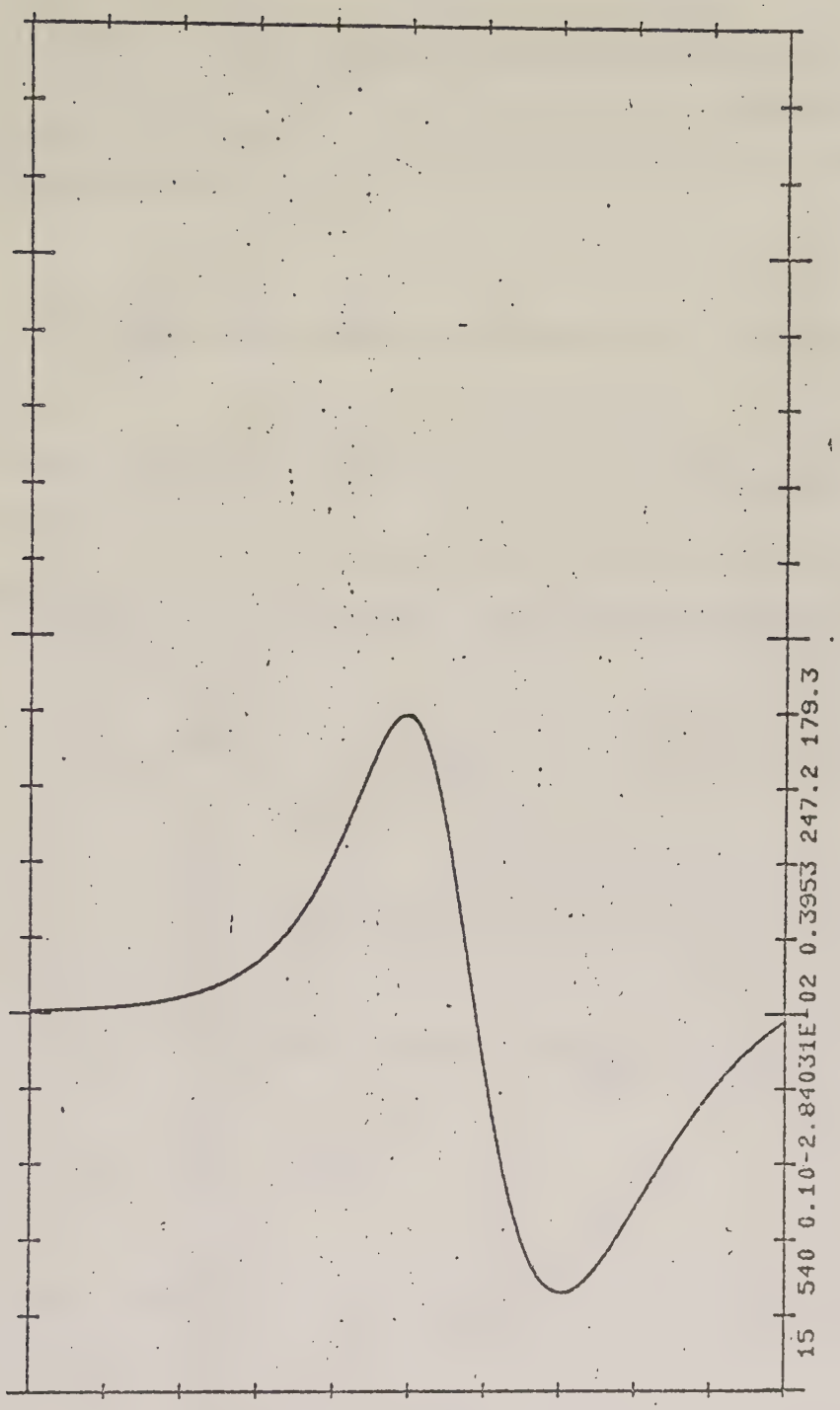


Fig. 8 : Soliton "0π" en cours de formation.
Photocopie d'une solution machine sortie sur imprimante graphique.

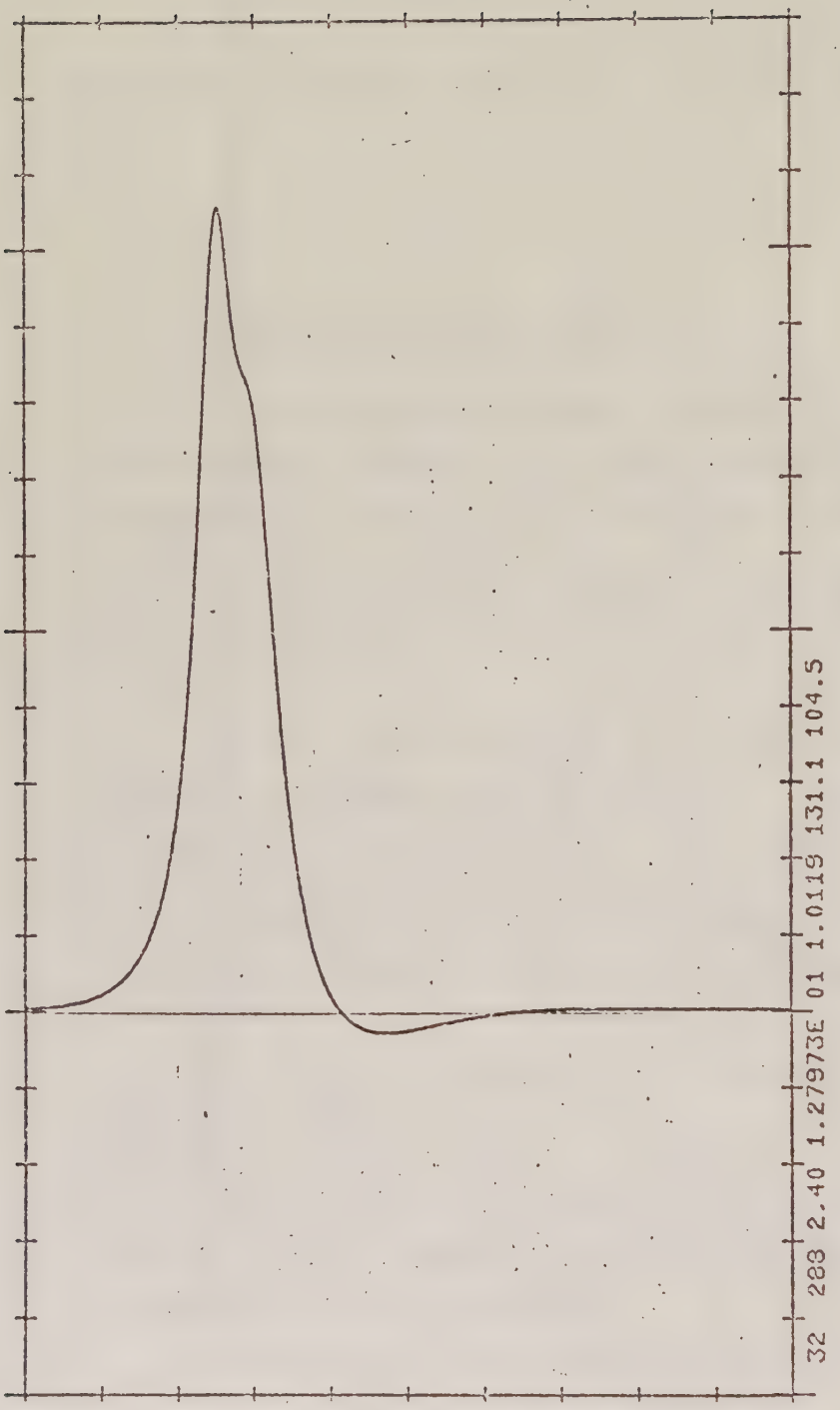


Fig.9 : Formations de 2 solitons 2π : la surface initiale est de $2,4 \times 2\pi$. On remarque la création d'un 2ème sommet qui se détache. Calcul numérique $\alpha = 1.510^{11}$ et $\tau = 3$ µs.

Elles sont notablement différentes : les courbes de Cornell ne sont pas caractéristiques de la formation de soliton type sine-Gordon, la variation de vitesse en fonction de l'amplitude étant de sens contraire. En comparant la fig.6 dans la zone du soliton 2π et la fig.7 du chapitre I courbe théorique issue de la théorie de Sauls on observe une grande dissemblance.

34 Calcul des énergies nécessaires à la transparence

P. de Vegvar et al (6) font état d'effets de saturation pour des énergies acoustiques émises de l'ordre de 10 nJ

Je vais avec le modèle de Sauls calculer l'énergie nécessaire pour provoquer cette transparence et la comparer à l'expérience.

Soit ε l'énergie de l'onde acoustique

$$\varepsilon = \rho v^2 = \frac{C^2}{\rho_o} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\rho^2 \, dt$$

$$\varepsilon = \frac{C^2}{\rho_o} \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cos^2 \xi dt$$

$$\varepsilon = \frac{C^2}{2\rho_o} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cos^2 \xi t \, dt \right] .$$

en négligeant la seconde intégrale devant la première, on a

$$\varepsilon = \frac{C^2}{2\rho_o} \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \, dt.$$

Le calcul machine a montre, pour un coefficient de couplage de $1.5\ 10^{11}$ pour $\tau = 3\ \mu s$ et $c = 375.1$ ms. l'apparition d'une saturation pour des surfaces de l'ordre de 8 à $15 \times 2\pi$

En prenant pour forme d'impulsion une sécante hyperbolique de surface 8π

$$\tilde{A} = \frac{8}{\tau} \frac{1}{\mathrm{ch}\ \frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tilde{A} = K\omega\ A$$

et donc

$$\varepsilon \simeq \frac{32}{\tau} \left(\frac{1}{K\omega}\right)^2$$

d'où la valeur moyenne de l'énergie

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{16}{\rho_o \tau^2} \left(\frac{1}{K}\right)$$

$$\langle\varepsilon\rangle = 54\ \mathrm{erg/cm^3}$$

Soit une énergie 5 000 fois plus grande que celle estimée expérimentalement.

Remarque

La valeur de $10^{-2}\mathrm{erg/cm^3}$ présentée par de Vegvar et al (6) est en accord avec les estimations effectuées à ORSAY pour une situation expérimentale semblable ce qui exclut une erreur grossière sur la puissance mise en jeu.

4 Cas de l'inhomogénéité

L'inhomogénéité est un facteur important dans le modèle de la transparence self-induite . En effet, seul le cas inhomogène a permis de mettre en évidence une loi des aires dans le cas général.

Aucun calcul machine n'a été effectué en tenant compte de l'inhomogénéité ce qui aurait allongé considérablement le temps de calcul. De plus, si l'introduction d'une inhomogénéité permettait d'expliquer la largeur de raie du mode, elle n'éliminerait pas les principaux défauts du modèle: variation de vitesse de phase inverse de celle observée expérimentalement et énergie de transparence énorme.

5 Conclusion

Le modèle proposé par Sauls ne correspond ni quantitativement ni même qualitativement aux expériences.

51 Quantitativement

L'énergie nécessaire à l'apparition d'une transparence est largement trop importante. Les valeurs de τ nécessaires à des valeurs cohérentes de c_ϕ/c_o sont trop petites.

Les ordres de grandeur des vitesses de propagation de solitons sont, après rectification, loin de l'expérience, Il en est de même pour la pente de $|c_o-c_1/c_1|$ en fonction de τ_F (chapitre I figure 7)

52 Qualitativement

Les anomalies qualitatives qui ont été relevées dans le modèle de Sauls sont les suivantes: 1) couplage qui ne dérive pas un lagrangien, 2) gap dans le modèle de dispersion petits signaux. De plus, les variations de vitesse accompagnant la formation des solitons sine-Gordon ont le signe inverse de ce qui est observé à Cornell; cet aspect qualitatif à lui seul me semble permettre de rejeter tout modèle aboutissant à des solitons de ce type.

53 Remarque sur l'établissement d'un modèle amélioré

Le modèle à deux niveaux tel qu'ila été présenté conduit inexorablement à des solutions soliton du type sine-Gordon et aux difficultés mentionnées ci-dessus.

Doit-il être rejeté pour autant ?

Le modèle de Sauls est attrayant dans la mesure où il contient le concept de système à deux niveaux - ou de spin fictif - qui est très général en mécanique quantique, qui semble pouvoir s'appliquer à la fonction d'onde du superfluide et qui introduit dans le système la non-linéarité d'une manière très naturelle. Le seul autre modèle qui vient à l'esprit et possède une généralité comparable est celui de l'oscillateur anharmonique. Mais, d'une part, ce dernier modèle paraît moins facile à justifier dans l' ^3He superfluide : l'image du système à deux niveaux découle de l'existence des seuls modes de squashing et real-squashing aux fréquences $\sqrt{12/5}\,\Delta$ et $\sqrt{8/5}\,\Delta$ à l'intérieur de la bande interdite de largeur 2Δ. D'autre part, il est connu qu'un tel oscillateur anharmonique conduit à des phénomènes de déplacements de fréquence et non à une absence de dissipation à fort niveau. Ces déplacements de fréquence ne paraissent pas être observés expérimentalement, alors que la transparence à fort niveau constitue un phénomène très marquant.

Evidemment, il serait toujours possible de construire des modèles plus compliqués, analogues à ceux mis en jeu dans la supraconductivité hors d'équilibre, ou bien permettre au mécanisme de dissipation de se saturer à fort niveau.

Il est clair que le modèle proposé par Sauls se place sur un plan très fondamental, a le mérite de la simplicité et se retrouve dans des branches voisines de la physique. Avant de le rejeter complètement, il faudrait pouvoir acquérir la certitude qu'il ne peut être modifié de manière simple pour correspondre mieux à la réalité. Résumons quelques critères auxquels un modèle amélioré devrait satisfaire :

1) Le régime linéaire doit être convenablement décrit dans la zone de dispersion anormale, c'est-à-dire très près du croissement de mode. D'abord, les valeurs expérimentales de l'atténuation à la résonance et de la largeur de raie doivent être reproduites convenablement. Ensuite, le comportement de la solution doit être soit du type soliton 0π c'est-à-dire oscillant asymptotiquement comme une fonction de Bessel, dans le cas d'un élargissement homogène, soit non oscillant dans le cas d'un élargissement inhomogène. Cet aspect qualitatif est très important car il permet l'identification du mécanisme d'élargissement des raies ce qui a une incidence marquée sur le modèle lui-même. Il semble malheureusement que sur ce point précis, le dépouillement en cours de manipulations réalisés à ORSAY conduise à une contradiction avec les expériences publiées par le groupe de Cornell (6) , expériences qui vont dans le sens d'un élargissement inhomogène. Si tel était néanmoins le cas ce mécanisme serait à inclure dans le système d'équations de Sauls.

2) Le régime non-linéaire - ou forts signaux - est atteint pour des niveaux d'excitation environ soixante dix fois trop faibles. Est-il envisageable d'invoquer un mécanisme qui conduise à un couplage environ soixante dix fois plus intense ? Ce nouveau mécanisme devra également réconcilier le sens de variation de la vitesse de groupe obtenue par le calcul avec celui donné d'une manière dépourvue d'ambiguité dans les expériences de Cornell : le paquet d'onde arrive plut tôt quand le niveau d'excitation augmente.

Si l'on prend ces critères au pied de la lettre, on serait tenté de dire que l'expérience de Cornell met en évidence des solitons 0π à fort niveau, quisont obscurcis par un amortissement inhomogène à bas niveau. Cette hypothèse ne peut cependant être étayée de manière solide au stade actuel de mon travail.

III6 Référence du chapitre III

1. WP. Halperin, conférence invitée à LT16, à paraître dans Physica.
2. E. Varoquaux Communication personnelle.
3. JA. Sauls. Phys. rev. let. 47 (1981) 530
4. JC. Wheatley Rev of Mod. Phys. 47 (1975) 415
5. VE. Koch Rwölfle Phys. rev. let. 46 (1981) 486
6. PGN. de Vegvar, SS Yan, D.Sagan, E Polturak, DM. Lee Physica 107B (1981) 683.

LISTE DES SYMBOLES UTILISES DANS CETTE PREMIERE PARTIE

A Amplitude de l'onde

$\tilde{A}$: K A

a : $1 - \frac{\omega^2 rsq}{\omega^2}$ écart à la résonance normalisée

b : $\frac{1}{\tau' \omega}$ atténuation du système en régime harmonique

c : vitesse de groupe

c_o : vitesse du zéro son

c_1 : vitesse du premier son

D',E' variables introduites dans l'approximation de l'enveloppe tel que

$\delta' = D' \cos \xi + E' \sin \xi$

$\tilde{E}$: 2E'

F ( ) fonction quelconque

g ( ) idem

$\vec{g}$: quantité de mouvement

$\not{h}$: constante de planck

II : matrice identité (dimension 2)

I : moment angulaire total

J2 : projection de J suivant l'axe 2

k : vecteur d'onde

k_F : vecteur d'onde à la surface de la sphère de fermi

L : moment orbital

$\vec{\ell}$: vecteur quelconque

m : masse de l'hélium 3

m^* : masse équivalente des quasiparticules

n : densité du superfluide

P : partie diagonale du tenseur des contraintes

R : valeur moyenne par ψ de l'observable σ_z

R' : R renormalise a $e^{-t/\tau}$

S : valeur moyenne par ψ dans l'observable II

S' : S renormalisé à $e^{-t/\tau}$

S : spin

t : temps

T_{sq} : température du mode de squashing

T_c : température critique

T : température

v : vitesse de groupe d'une onde

v_F : vitesse de fermi

Z : variable d'espace (dimension 1)

K coefficient de couplage (mode-son)

K' coefficient de couplage (son-mode)

Lettres grecs

$\alpha = \frac{KK' \omega^2}{4 c^2}$ coefficient de couplage de l'équation finale du modèle théorique

α_a : atténuation

γ : valeur moyenne par ψ de l'observable σ_y

γ' : γ renormalisé par $e^{-t/\tau}$

Δ : énergie de gap BCS

$\delta\rho$: variation de densité

ε : énergie acoustique de l'onde émise

η : facteur de disymétrie particule trou

λ : coefficient de couplage sans dimension

γ_s : coefficient de couplage introduit par Sauls

γ_{rsq} : coefficient de couplage expérimental mesuré à North

ξ : variable introduite dans l'approximation de l'enveloppe

$$\xi = \omega t - kz + \emptyset$$

σ_x σ_y σ_z matrice de Paule tel que $\sigma_x \sigma_y = {}^{i/2} \sigma z$

τ, τ' constantes de temps

ϕ : phase

χ : coefficient de couplage $\psi = \frac{+KK'}{c^2}$

$|\psi>$: coefficient d'onde du système à 2 niveaux équivalent

ω : pulsation

ω_{sq}: pulsation du mode de squashing

ω_{rsq} : pulsation du mode de real squashing

CHAPITRE IV

Réalisation d'un thermomètrie automatique à L C M N

IV1 Thermomètrie actuelle

IV2 Thermométrie à LCM,

IV3 Principe de la mesure

IV4 Contraintes dues à l'expérimentation

IV5 Structure du pont

51 Choix du dispositif automatique
52 Réalisation de l'asservissement
521 Commande des courants d'équilibrages
522 Lecture de l'information de déséquilibre
523 Schéma de l'asservissement

IV6 Problèmes de réalisation

IV7 Description de l'interface

IV8 Programmation

81 Introduction
82 Description

IV9 Références du chapitre IV

Il s'agit dans cette seconde partie de mon travail de décrire la réalisation d'un pont automatique d'inductance mutuelle destiné à la mesure des températures inférieures à 1 mK.

IV1 Thermométrie actuelle

La thermométrie actuelle est fondée sur la mesure de susceptibilité du platine par RMN.

Ses caractéristiques sont une précision de l'ordre de 1% sur une échelle absolue des températures et une puissance dissipée à la mesure importante. D'où la nécessité d'espacer les mesures dans le temps afin de ne pas réchauffer le superfluide.

IV2 Thermométrie à LCMN

Son principe est la mesure de la susceptibilité magnétique χ d'un sel paramagnétique dilué (Lanthanum Cérium Magnésium Nitrate) supposé dépendre de la température suivant la loi de Curie.

Les températures minimales de mesures sont de l'ordre de 0,5 mK(1)

Le sel deutéré permettrait de descendre à 0,3 mk (2)

Les avantages de la méthode sont les suivants : La puissance nécessaire à la mesure est négligeable. La mesure peut se faire en continu. La résolution en température de l'ordre de 10^{5}.

L'inconvénient essentiel en est qu'elle nécessite une calibration et donc un thermomètre principal.

IV3 Principe de la mesure

La susceptibilité magnétique estmesurée par un pont d'inductance fig(1)

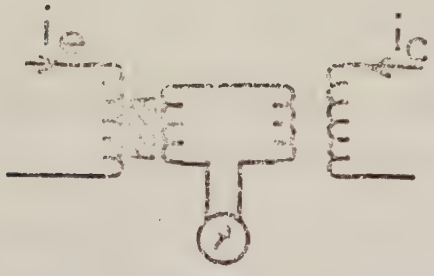


Fig. 1

ie désigne le courant d'excitation
ic désigne le courant de compensation

La mesure s'effectue à ie fixé après le réglage de ic pour avoir zéro au détecteur (squid).

La fig (2) est le schéma de principe du pont donné par le constructeur SHE (6) l'inpédance Z est remplacée par une inductance mutuelle schématiséeci-dessous.

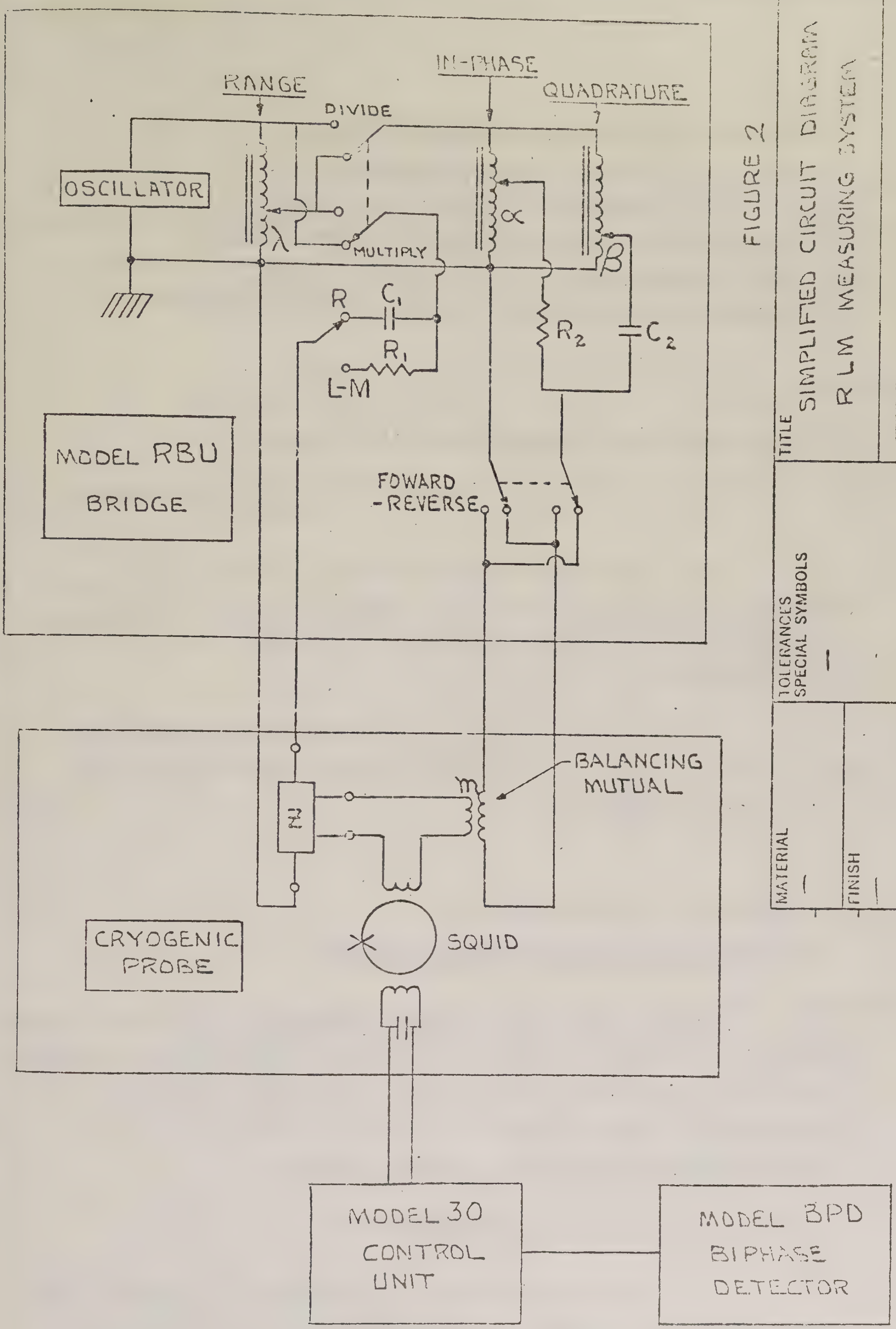


FIGURE 2

TITLE SIMPLIFIED CIRCUIT DIAGRAM
RLM MEASURING SYSTEM

S.H.E.
SAN DIEGO, CALIFORNIA

ASSY. DWG.	
DWG. NO.	A3000-007
REV.	
TOLERANCES SPECIAL SYMBOLS	—
DIMENSIONS	—
SHEET	1 OF 1
MATERIAL	—
FINISH	—
DRN. BY	3 DATE 9-23-76
APPV'D BY	RTJ DATE 9-29-76
SCALE	—
S/N	REVISION DESCRIPTION	BY	DATE

Le dispositif de mesure se compose d'un pont d'inductance mutuelle (ref de SHE modèle RBU) qui permet le réglage de la composante en phase et en quadrature du courant de compensation et d'un amplificateur des composantes d'erreurs qui fournit ces 2 informations (erreur de phase et erreur en quadrature) sous forme de tension continue variable de 0 à 10 volts.

IV4 Contraintes due à l'expérimentation

Le pont de mesure proposé par la SHE est manuel.

Or la méthode de réfrigération (desaimantation nucléaire) implique une variation sensible de la température en fonction du temps ce qui nécessite des mesures fréquentes de la température.

Il est donc nécessaire d'automatiser le pont de mesure afin de créer un dispositif rapide de mesure et de calcul de la température.

IV5 Structure du pont de mesure

51 Choix du dispositif automatique

Un CBM 8032 de la société Commodore a été choisi pour assurer la commande automatique du pont le calcul de la température et la transmission de cette information au calculateur principal qui gère le reste de la manipulation (soit un 9825 de chez Hewlett Packard).

52 Réalisation de l'asservissement

Il fallait automatiser la commande de l'équilibrage des composantes en phase et en quadrature et permettre l'acquisition des informations de tension d'erreur par le CBM.

521 Commande des courants d'équilibrages

Des deux informations en phase et en quadrature l'une nous donne la mesure de la mutuelle la seconde nous donne les pertes dans le sel (que l'on supposera faibles et faiblement variables avec la température) le problème se ramène donc à une seule composante (en phase).

Pour le résoudre j'ai utilisé un transformateur de rapport variable de zéro à un par pas de 10^{-6} commandé par l'intermédiaire d'un bus IEEE et que l'on a place en parallèle du transformateur à réglage manuel du pont SHE comme indiqué ci-dessous.

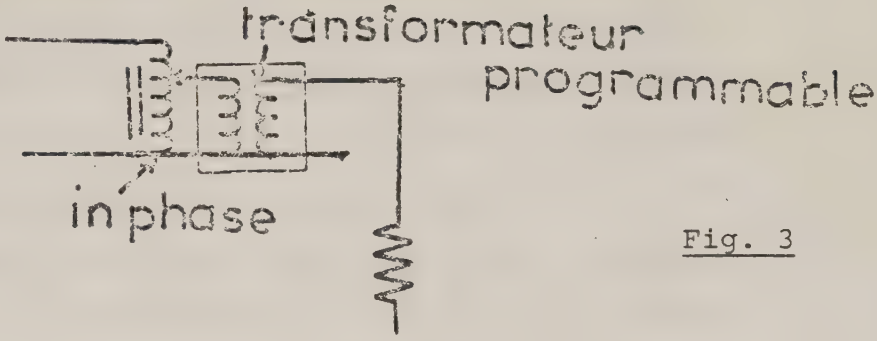


Fig. 3

522 Lecture de l'information de déséquilibre

Seule l'information en phase est intéressante, elle parvient au CBM par un voltmètre programmable IEEE le KEITHLEY 192.

523 Schéma général de l'asservissement

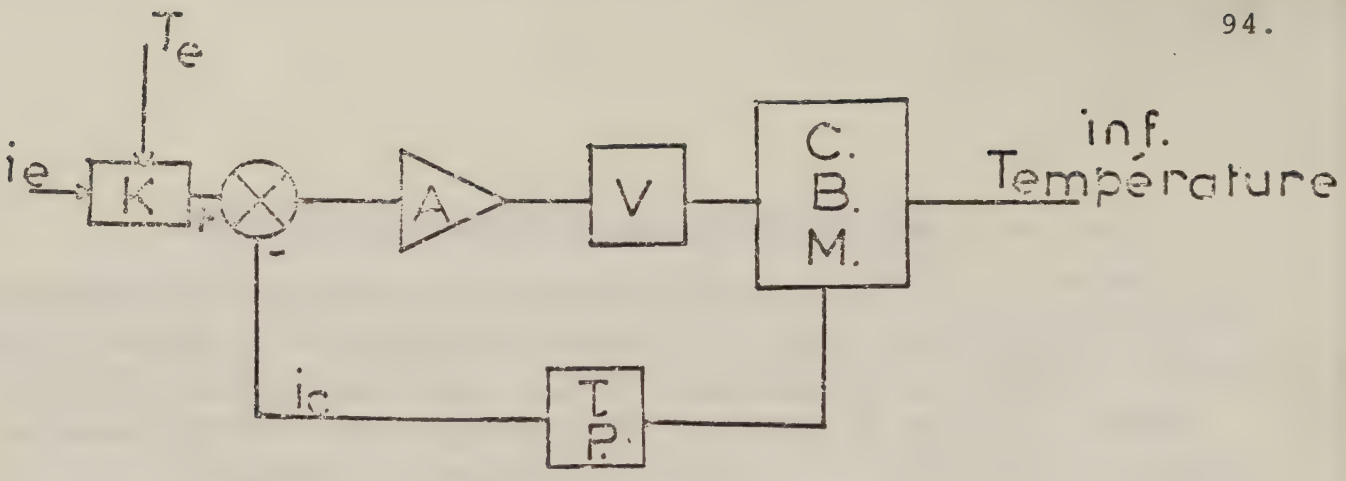


Fig. 4

Je n'ai représenté que l'information due à la composante en phase du courant d'erreur.

A représente l'amplification de l'erreur (squid plus détection synchrone) l'information à la sortie de A se présente sous la forme d'une tension variable entre zéro et dix volts lue par V qui quantifie l'information et la présente au CBM par l'intermédiaire du bus IEEE.

Le CBM traite l'information et la transmet au calculateur maître (HP 9825) par un bus IEEE et corrige éventuellement le courant de correction par l'intermédiaire du transformateur de rapport.

IV6 Problèmes de réalisation

Le pont lui même est un produit du commerce vendu par la société SHE . La contre réaction par le transformateur du rapport programmable a été réalisée en intercalant deux fils entre la sortie du transformateur α et la résistance R 2 (fig 2).

Les problèmes de réalisation se sont limités à la commande du pont par le calculateur CBM.

Comment pourra-t-il transmettre l'information en conversationnel IEEE au calculateur HP 9825, lire la température

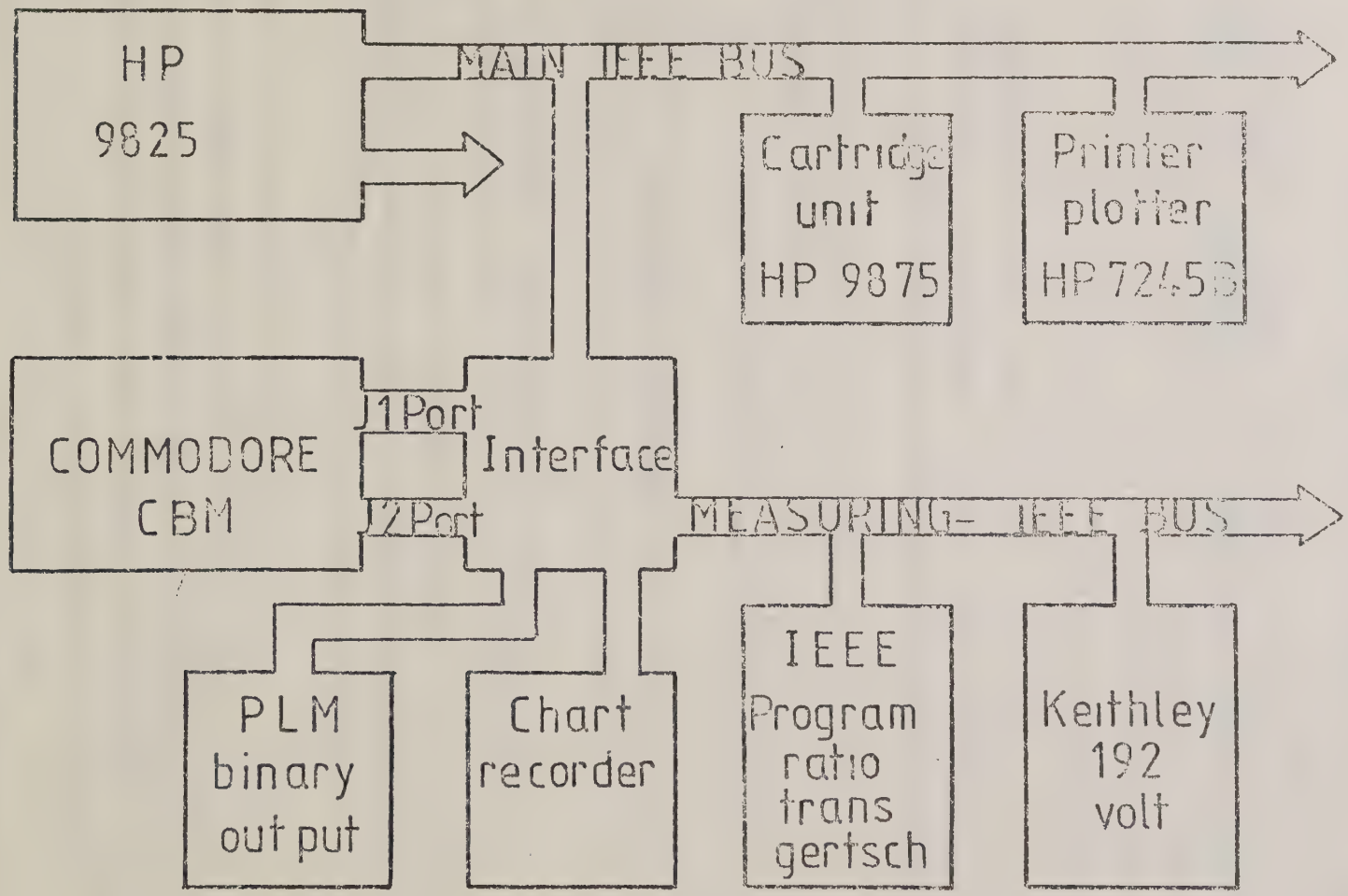


Fig.5 : Schéma de l'ensemble informatique de gestion de la manip.

sur le thermomètre platine commandé par un bus BCD et réalisé l'asservissement du pont automatique par la commande du voltmètre et du transformateur sachant que le CBM ne possède qu'un seul bus IEEE sur lequel il est toujoursmaître ?

Ce problème a été résolu à l'aide d'une interface qui créé sur le CBM deux bus IEEE indépendants et symétriques (le CBM à la possibilité d'être alternativement maître et esclave sur les 2 bus) plus un troisième bus BCD pour la commande du thermomètre à platine.(Fig.5).

Cet interface a necessité la création de programmes en langage machine (6502) implantés en mémoire morte dans le CBM pour gérer les priorités de conversationnels entre les différents bus et pour rendre le conversationnel IEEE du CBM compatible avec celui du calculateur 9825.

IV7 Description de l'interface.

L'idée de base est la création à partir du bus IEEE du CBM de trois bus différents et d'utiliser le port utilisateur pour en commander les priorités.

La structure de base est donc 16 multiplexeurs huit voies (on réalisera en fait huit bus) qui multiplie chacune des seize lignes du bus IEEE du CBM par huit.

Une logique annexe permet de régler les problèmes de priorités des bus par exemple le CBM est en conversationnel sur son bus de commande du pont automatique et le calculateur 9825 veut l'adresser ou le CBM calcule pendant que le calculateur 9825 lui réclame une température.

Une description plus détaillée de cet interface est donnée en annexe IV . C'est en fait la copie d'un article à paraître (septembre 82) à la Review of Scientific Instrument.

IV8 Programmation

81 Introduction

Le travail de programmation se divise en deux parties: une programmation primaire qui a consisté à créer une partie du programme machine du CBM et de nouveau programme de gestion pour l'interface et la commande du thermomètre à platine, et une programmation de traitement du signal et de gestion de l'asservissement.

Je ne décrirais que la partie concernant le travail de base, les algorithmes de la seconde partie n'étant pas encore testés sur le système complet.

Ces algorithmes primaires permettent

a) un conversationnel IEEE selon les normes Hewlett-Packard en maître ou en esclave pour le CBM.

b) la gestion des ordres 9825.

c) la gestion des appareils d'asservissements du pont.

d) la gestion de la mesure des températures du thermomètre à platine

e) la gestion de l'interface.

82 Description

a) conversationnel IEEE selon les normes HP. On pourra se rapporter à la référence (4) pour une présentation du conversationnel.

Chaque ligne du port IEEE du CBM est programmable indépendamment il est donc possible de créer un conversationnel

différent de celui résidant dans la mémoire de la machine. Le conversationnel a été réalisé à l'aide desprogrammes assembleurs RECEP DATA, TRANS DATA, ADRES DATA, RECEP GENE et TRANS GENE de l'annexe V.

Les différences essentielles entre les conversationnels IEEE du CBM et de celui de la 9825 se situent au niveau de l'adressage de la terminaison du conversationnel.

b) Gestion des ordres 9825

Un circuit logique de veille permet de décoder un adressage du calculateur 9825 quelque soit la configuration du CBM à cet instant. Lorsque cette logique a reconnu l'adresse du CBM elle déclenche une interruption au niveau du microprocesseur du CBM qui arrête son travail et prend en charge le conversationnel avec la 9825 puis une fois les ordres effectués retourne à son travail.

Il a fallu créer - un programme de gestion de cette interruption en préservant toutes les données antérieures à l'interruption en mémoire afin de ne perdre aucune information.

- un programme de lecture des ordres 9825,
- un programme de réinitialisation de l'interface et du microprocesseur une fois l'information échangée, le CBM reprend alors son travail précédent l'interruption.

Ces programmes se trouvent en annexe IV sous les noms gestion NMI, et 9825 execut.

c) Gestion des appareils d'asservissements

Il s'agit d'utiliser les programmes cités en a pour transmettre ou recevoir les informations nécessaires à la gestion du pont. Cinq programmes spécifiques ont ainsi été crées et sont présentés en annexe V.

d) Gestion de la mesure des températures platine

Il faut commander le port BCD de l'interface pour

envoyer la commande de la mesure et permettre la lecture de l'information.

Le conversationnel se fait sur 16 bits un bit de commande et 3 digits et demie de lecture. Leprogramme est présenté en annexe V.

e) Gestion de l'interface

Ce programme permet l'ouverture et la fermeture des différents ports et l'imitiatisation des divers logiques de contrôles dans les diveres configurations de conversationnel.

Il est présente en annexe V .

Enfin la mise au point de ces programmes a nécessité l'écriture de deuxprogrammes basic d'aide à l'assemblage et au désassemblage. Le listing desprogrammes résidents en mémoire morte et présentés en annexe V a été réalisé par le programme de désassemblage.

IV.9 REFERENCES DU CHAPITRE IV

1) T.A. ALVESO, T. HAAVASOJA, P.C. MAIN, L.M. REHN, K.M. SALOHEIMO- Jour. de Physique Lettres, 39 (1978) 459.
2) R.S. SAFRATA, M. KOLAC, J. MATAS, M. ODEHNAL, K. SVEC, Jour. Low Temp. Physics, 41 (1980) 405.
3) PET/CBM personnal Compiler Guide - C.S. DONAMUE - J.K. ENGER - OSBORNE/MAC GRAW HILL.
4) PET and the IEEE 488 bus (GPIB)
E. FISHER, C.W. JENSEN-OSBORNE/Mac GRAW HILL.
5) 6502 Assembly language programming
L.A. LEVENTHAL-OSBRONE/MAC GRAW HILL
6) S.H.E. Corporation - SANDIEGO-CALIFORNIE

ANNEXE I

L'objet de cette annexe est de démontrer que les termes de couplages dans les équations de Sauls ne dérivent pas d'un Lagrangien.

Ils correspondent à un système qui est soit non conservatif soit non holonone (ou les deux) et qui n'a par conséquent pas d'analogue mécanique simple.

Cette annexe comporte trois parties.

I1 - Présentation du formalisme Lagrangien

I2 - Démonstration

I3 - Conséquences

II - Présentation du formalisme Lagrangien

Le formalisme Lagrangien est un des formalismes de la mécanique analytique les plus utilisés avec celui de Hamilton .

Il permet de décrire le comportement mécanique d'un système quelconque et son principe a été étendu à la statistique et à la mécanique quantique. Il se traduit par la définition d'une fonction dite de Lagrange L. qui obéit à un système d'équation tel que

$$\frac{d}{dt}\left|\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial q_i}{\partial t}\right)}\right| - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

avec q_i coordonnée du système

Les expressions s'étendent sanspeine à la mécanique des milieux continus et l'on parle alors dedensité de Lagrangien $\mathcal{L}$ tel que pour un système à une dimension

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)} - \frac{d}{dz}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)} = 0.$$

avec z coordonnée du point considéré et η sa variable interne.

Dans sa forme la plus générale s'écrit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial z}, z, t\right)$$

Les équations de Sauls quant à elles, décrivent le comportement de deux systèmes couplés en dimension un et donc on doit retrouver ce système d'équations en introduisant densité linéique pour le système total et en écrivant les équations de Lagrange.

$$1 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \rho}{\partial t})} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \rho}{\partial z})} = 0$$

$$2 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \delta}{\partial t})} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \delta}{\partial z})} = 0$$

Il s'agit de démontrer que dans sa forme la plus générale les équations AI1 et AI2 ne peuvent contenir des termes croisés de la forme

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

Pour cela l'idée consiste à prendre l'expression la plus générale de la densité linéique de Lagrangien, de la porter dans les équations AI 1 et AI 2 afin de vérifier s'il apparaît ou non les termes de couplages proposés par Sauls.

AI2 Démonstration

Cette démarche parait longue et fastidieuse mais on verra qu'elle se simplifie rapidement. Tout d'abord on ne s'intéresse qu'à la légitimité des termes de couplage.

Il ne sera donc pas nécessaire d'écrire tous les termes de la fonction $\mathcal{L}$. On se limitera au calcul de la partie concernant le couplage ou l'interaction noté $\cap(\mathcal{L})$.

Ainsi chaque terme de $\cap(\mathcal{L})$ va donner un couple de deux termes par les équations AI 1 et AI 2 et il s'agit de vérifier si l'on obtient un couple $\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial z^2}, \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\right)$.

Ecrivons donc les équations de Lagrange

$$\frac{\partial \cap(\mathcal{L})}{\partial \rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \cap(\mathcal{L})}{\partial\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)} - \frac{d}{dz}\frac{\partial \cap(\mathcal{L})}{\partial\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)} = \varepsilon_1$$

$$\frac{\partial \cap(\mathcal{L})}{\partial \delta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \cap(\mathcal{L})}{\partial\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)} - \frac{d}{dz}\frac{\partial \cap(\mathcal{L})}{\partial\left(\frac{\partial\delta}{\partial z}\right)} = \varepsilon_2$$

ε_1 et ε_2 sont des fonctions différentes et représentent la partie des équations AI.1 et AI.2 respectivement qui ne concerne pas les termes de couplage etdonc qu'il ne nous intéresse pas d'expliciter.

On pourrait maintenant introduire un modèle pour $\cap(\mathcal{L})$ dépendant de ρ et δ et de leurs dérivées par rapport au temps et à l'espace et en se limitant à une forme quadratique par exemple (nécessairement symétrique en ρ et δ).

. porter cette expression dans AI 1 et AI 2. On vérifierait alors si lestermes de couplage proposé par Sauls apparaissent. Ce calcul n'est pas nécessaire avec quelques hypothèses restrictives sur le Lagrangien afin de se limiter au cas des équations proposées par Sauls. Tout d'abord les équations de Sauls n'ont qu'un terme de couplage chacune et ne dépendant que d'une seule dérivation (pas de terme de croisé). Les solutions attendues par $\cap(\mathcal{L})$ porté dans les deux équations de Lagrange sont du type $(P\delta\ ,\ Q\rho)$ avec P et Q deux opérateurs à un terme chacun.

Si le terme de dérivée est unique il ne peut dépendre que de l'espace ou du temps avec un ordre de dérivation inférieur ou égal à 2. Il suffit pour s'en convaincre de revenir à la définition de $\mathcal{L}$ et des équations de Lagrange.
donc P et $Q \in O$

avec $$O = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ ,\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\}$$

Ces hypothèses étant introduites, en regardant les équations de Lagrange on s'aperçoit que les premiers membres des équations AI 1 et AI 2 sont permutés [AI 1 → AI 2 et AI 2 → AI 1]
si l'on change ρ en δ et réciproquement.

Ainsi les termes de couplage ont des importances équivalentes et seul les couples du type $(P\rho\ ,\ P\delta)$
avec $P \in O$
peuvent exister.

Tout couple du type $(P\rho\ ,\ Q\delta)$ avec $P \neq Q$.
ne peut donc exister ; ceci s'applique en particulier pour

$$P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{ et } Q = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Les équations proposées par Sauls ne peuvent donc dériver d'un Lagrangien.

AI3 Conséquences

Les équations de Lagrange utilisées pour cette démonstration sont celles de la mécaniqueanalytique dans sa forme la plus simple c'est-à-dire pour des systèmes holonomes et rhéonomes .

Donc le fait que les termes de couplage de l'équation propose par Sauls ne dérive pas d'un Lagrangien peut venir de deux choses.

1° On a vu au chapitre I que le système comporte en fait deux modes couplés ω_{sq} et ω_{rsq} et le fait de négliger le terme de squashing a pu entraîner l'omission de terme de couplage.

2° Le système doit être traité dans le cadre des systèmes non holonomes.

Pour la proposition 1, cela n'est pas possible puisqu'il n'y a pas d'interaction entre ω_{sq} et ω_{rsq} on peut donc reprendre le raisonnement de la partie AI2 pour les deux couples (son - ω_{rsq}) et (son - ω_{sq}) séparément; il ne peut apparaître de terme nouveau.

Nous sommes donc dans le cas de la remarque 2. Mais lorsque les forces d'interaction dépendent des vitesses, le formalisme de Lagrange perd de sa simplicité et de son utilité.

Ce type d'interaction que l'on rencontre par exemple en hydrodynamique ne peut être exclu à priori dans le cas de l'^{3}He superfluide. Sans pouvoir l'établir explicitement

je pense que les termes de couplage utilisés parSauls tombent dans cette catégorie.

Les équations phénoménologiques correspondantes ne correspondront pas à un modèle mécanique simple ce qui, à priori,ne paraît pas en faciliter l'étude.

Cependant on constate au chapitre II que les détails de la forme du couplage disparaissent dans l'approximation de l'enveloppe et que l'étude effectuée sur la propagation des modes couplés ne dépend pas du couplage choisi.

C'est la raison pour laquelle le fait que les équations de Sauls ne dérivent pas d'une densité Lagrangienne ne tire pas à conséquence.

ANNEXE 2

Il s'agit dans cette annexe d'expliciter le calcul de $c_{\phi/c}$ et de l'atténuation dans le modèle linéaire proposé par Sauls. Puis dans une deuxième partie de calculer les modifications à $c_{\phi/c}$ et à l'atténuation apportées par la prise en compte de la dispersion du mode, c'est-à-dire par le terme c_{rsq}

A. Calcul de $c_{\phi/c}$ et α : équations proposées par Sauls.

D'après les équations IIE du chapitre II

et en posant : $\chi = \frac{KK'}{c^2}$ $\quad a = 1 - \frac{\omega^2 rsq}{\omega^2}$ $\quad b = \frac{1}{\tau\omega}$

on a

$$(k' + i\,k'') = \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{1 + \chi \frac{1}{a + ib}}}$$

on pose alors

$$\chi' = 1 + \frac{\chi a}{a^2 + b^2} \qquad \chi'' = \frac{-\chi b}{a^2 + b^2}$$

$$(k' + ik'') = \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{\chi' + i\,\chi''}}$$

$$(k' + i\,k'') = \frac{\omega}{c} \frac{\sqrt{\chi' - i\chi''}}{\sqrt{\chi'^2 + \chi''^2}}$$

On cherche alors k' et k" tel que

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\chi'}{\chi''^2 + \chi'^2} \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$2\,k'k'' = \frac{-\chi''}{\chi''^2 + \chi'^2} \frac{\omega^2}{c^2}$$

Posons

$$\xi' = k'^2$$

$$\xi'' = - k''^2$$

on a alors :

$$\xi' + \xi'' = \frac{\chi'}{\chi''^2 + \chi'^2} \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\xi' \xi'' = \frac{\chi''^2}{4 (\chi''^2+\chi'^2)^2} \frac{\omega^2}{c^2}$$

Le problème se ramène à la recherche de deux grandeurs connaissant leur somme et leur produit. Soit S leur somme et P leur produit. ξ' et ξ'' sont alors les racines de l'équation du deuxième degré :

$$\xi^2 - S \xi + P = 0$$

$$\Delta = S^2 - 4 P$$

$$\sqrt{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{\chi''^2 + \chi'^2}} \frac{\omega^2}{c^2}$$

d'où

$$\xi' = \frac{\chi' + \sqrt{\chi'^2 + \chi''^2}}{2(\chi''^2 + \chi'^2)} \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\xi'' = \frac{\chi' - \sqrt{\chi'^2 + \chi''^2}}{2(\chi''^2 + \chi'^2)} \frac{\omega^2}{c^2}$$

On vérifie que quand $b \to 0$ $\quad \xi'' = \chi'' = 0$

et donc

$$k' = (\pm)\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\chi'}{2(\chi''^2+\chi'^2)} + \frac{1}{2\sqrt{\chi''^2+\chi'^2}}}$$

$$k'' = (\pm)\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{-\chi' + \sqrt{\chi'^2+\chi''^2}}{\chi''^2+\chi'^2}}$$

On pose $k' = \frac{\omega}{c_\phi}\,\alpha_a$ et l'on a $\chi'^2 + \chi''^2 = \frac{(a+\chi)^2+b^2}{a^2+b^2}$

$$\frac{c_\phi}{c} = \left\{ 2\,\frac{(a+\chi)^2+b^2}{a^2+b^2+\chi a + \sqrt{(a^2+b^2)^2\left[1+\frac{2\chi a+\chi^2}{a^2+b^2}\right]}} \right\}$$

Soit $\alpha = k''$ l'atténuation

$$k'\,k'' = -\frac{1}{2}\,\frac{\chi''}{\chi'^2+\chi''^2}\,\frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2k'}\,\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{\chi''}{\chi'^2+\chi''^2}$$

je rappelle que $k' = \frac{\omega}{c\phi}$

$$\alpha a = +\frac{1}{2}\,\frac{c\phi}{\omega}\,\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{\chi b}{(a+\chi)^2+b^2}$$

et donc

$$\alpha a = \frac{1}{2}\,\frac{\omega}{c}\,\frac{c\phi}{c}\,\frac{\chi b}{(a+\chi)^2+b^2}$$

B. Calcul de $c_{\phi/c}$ et α_a dans le cas d'une vitesse de mode. On se limitera en fait à montrer que l'introduction d'une vitesse de mode supprime le gap et comment on passe des solutions $c_{rsq \neq 0}$ aux solutions $c_{rsq} = 0$.

Reprenons le calcul comme précédemment en introduisant une vitesse dite de real squashing par analogie aux équations de Sauls et au modèle du mode de squashing

On a

$$\partial_t^2 \rho - c^2 \partial_z^2 \delta\rho = K' \partial_z^2 \delta .$$

$$(\partial_t^2 + \frac{\partial t}{\tau} + \omega_{rsq}^2 - c_{rsq}^2 \partial_z^2)\ \delta = K\ \partial_t^2 \delta\rho$$

On pose

$$\delta = \delta_0\ e^{-i(\omega t - kz)}$$

$$\rho = \rho_0\ e^{-i(\omega t - kz)}$$

Soit en remplaçant δ et ρ par leur expressions dans les équations différentielles il vient :

$$[-\omega^2 + c^2 k^2]\ \delta\ \rho_0 = - K'\ \delta_0\ k^2$$

$$[-\omega^2 - i\ \frac{\omega}{\tau} + \omega_{rsq}^2 + \tilde{c}_{rsq}^2\ k^2]\ \delta_0 = - K\delta\rho_o\ \omega^2$$

Il vient :

$$\frac{\delta_0}{\rho_0} = \frac{[-\omega^2 + c^2k^2]}{-K\ k^2} = \frac{K\ \omega^2}{-\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} + \omega^2_{rsq} + c^2_{rsq}\ k^2}$$

On retrouve les équations du A. pour $C_{rsq} = 0$.

$$[-\omega^2 + c^2\ k^2]\ [-\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} + \omega^2_{rsq} + c^2_{rsq}\ k^2] = KK'\ k^2\omega^2$$

$$(c^2k^2)[-\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} + \omega^2_{rsq} + c^2_{rsq}\ k^2] - \omega^2\ c^2_{rsq}\ k^2 - KK'\ k^2\omega^2$$

$$= \omega^2\ [-\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} + \omega^2_{rsq}] \quad .$$

Soit

$$k^4\ [c^2\ c^2_{rsq}] + k^2\ [-c^2\ \omega^2 - \frac{ic^2\omega}{\tau} + c^2\omega^2_{rsq} - \omega^2c^2_{rsq} - KK'\omega^2]$$

$$= \omega^2[-\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} + \omega^2_{rsq}].$$

Le terme c_{rsq} introduit un terme d'ordre 4 dans l'équation caractéristique.

Pour résoudre l'équation on pose $\Gamma = k^2$

Soit

$$\Gamma^2 (c^2 c^2_{rsq}) + \Gamma \left(-c^2\omega^2 - \frac{i\, c^2\omega}{\tau} + c^2\omega^2_{rsq} - \omega^2 c^2_{rsq} - KK'\omega^2\right)$$

$$= \omega^2\left(-\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} + \omega^2_{rsq}\right).$$

On pose comme précédemment

$$\chi = \frac{KK'}{c^2} \qquad \frac{1-\omega^2_{rsq}}{\omega^2} = a$$

$$\frac{1}{\tau\omega} = b \qquad \frac{c^2_{rsq}}{c^2} = C'$$

Le discriminant de l'équation s'écrit :

$$\Delta = C'^4\ \omega^4\ \ (a+C'+\chi+ib)^2 - 4C'\ (a+ib)$$

d'où

$$\Gamma \pm = \frac{1}{2}\ \frac{\omega^2}{c^2_{rsq}}\ \ (a+C'+\chi+ib) \pm \sqrt{(a+C'+\chi+ib)^2 - 4C'(a+ib)}$$

Pour obtenir k', k" il nous faut résoudre :

$$\Gamma = (k' + ik")^2$$

L'expression de $c_{\phi/c}$ et de α est alors longue et compliquée. Il suffit en fait de connaître Γ pour montrer que lorsque b tend vers o dans le cas de l'introduction de vitesse de c_{rsq} il n'existe pas de gap. En effet quend b tend vers zéro k" : o et Γ est réel on a alors :

$$k' = \sqrt{\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{\omega}{c_{rsq}}\ \left| a + C' + \chi + \sqrt{(a+C'+\chi)^2 - 4aC'}\right|^{1/2}$$

Montrons que l'expression est toujours positive.

ainsi :

$$\sqrt{(a+C'+\chi)^2 - 4aC'}$$

Il faut que

$$a^2 + 2a\,(\chi - C') + C'^2 + \chi^2 + 2C'\chi > 0 \quad \forall\, a.$$

$$\Delta = -16\, C'\chi$$

Pour a réel le terme est toujours positif.
On remarque que pour $c_{rsq} = 0$ le discriminant s'annule et l'on retrouve une racine.

$\sqrt{(a+C'+\chi)^2 - 4aC'}$ est donc réel. k' estdonc toujours réel.

pour s'en convaincre on peut l'écrire sous la forme

$$k' = \frac{\omega}{\sqrt{2}\, c_{rsq}} \left[a + C' + \chi + \left\{ (a - C' + \chi)^2 + 4C'\chi \right\}^{1/2} \right]^{1/2}$$

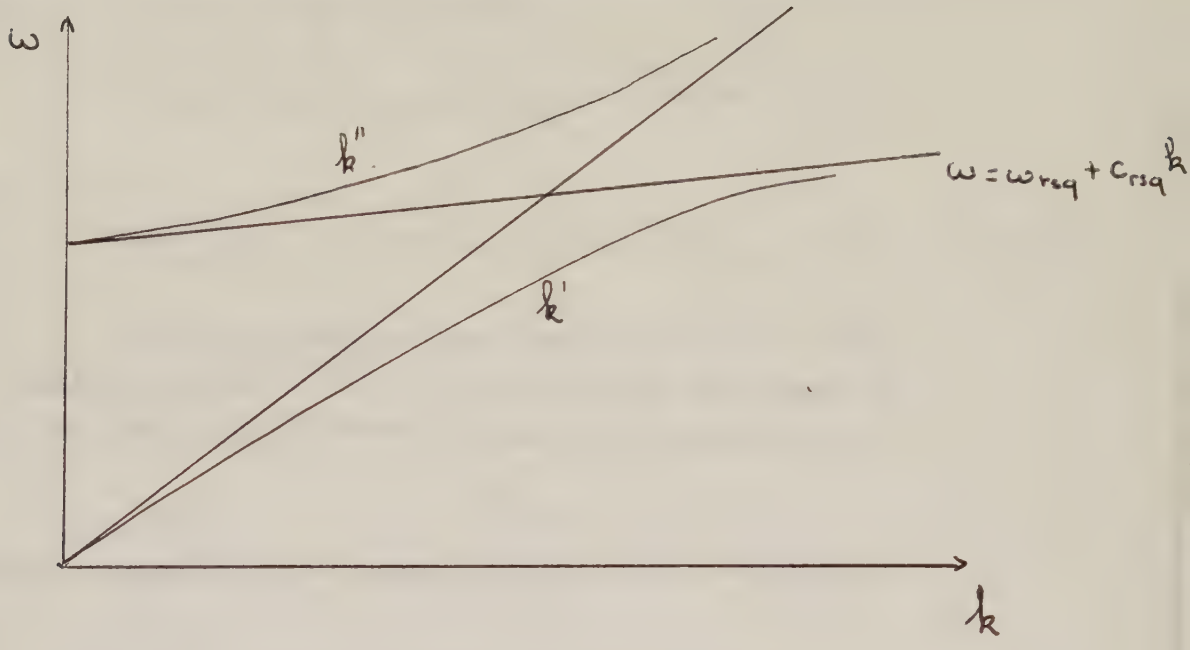
et remarquer que quand $a + C + \chi$ devient négatif, le second terme vaut $\left((2C')^2 + 4C'\chi \right)^{1/2}$

Pour Γ^-

$$k' = \frac{\omega}{\sqrt{2}\, c_{rsq}} \left[a + C' + \chi - \left\{ (a - C' + \chi)^2 + 4C'\chi \right\}^{1/2} \right]^{1/2}$$

on trouve une fréquence minimale en dessous de laquelle il n'y a plus propagation soit $\omega < \omega_{rsq}$.

On peut représenter les solutions dans un diagramme



et constater l'inexistence de gap

Lorsque c_{rsq} tend vers zéro on retrouve les solutions calculées précédemment.

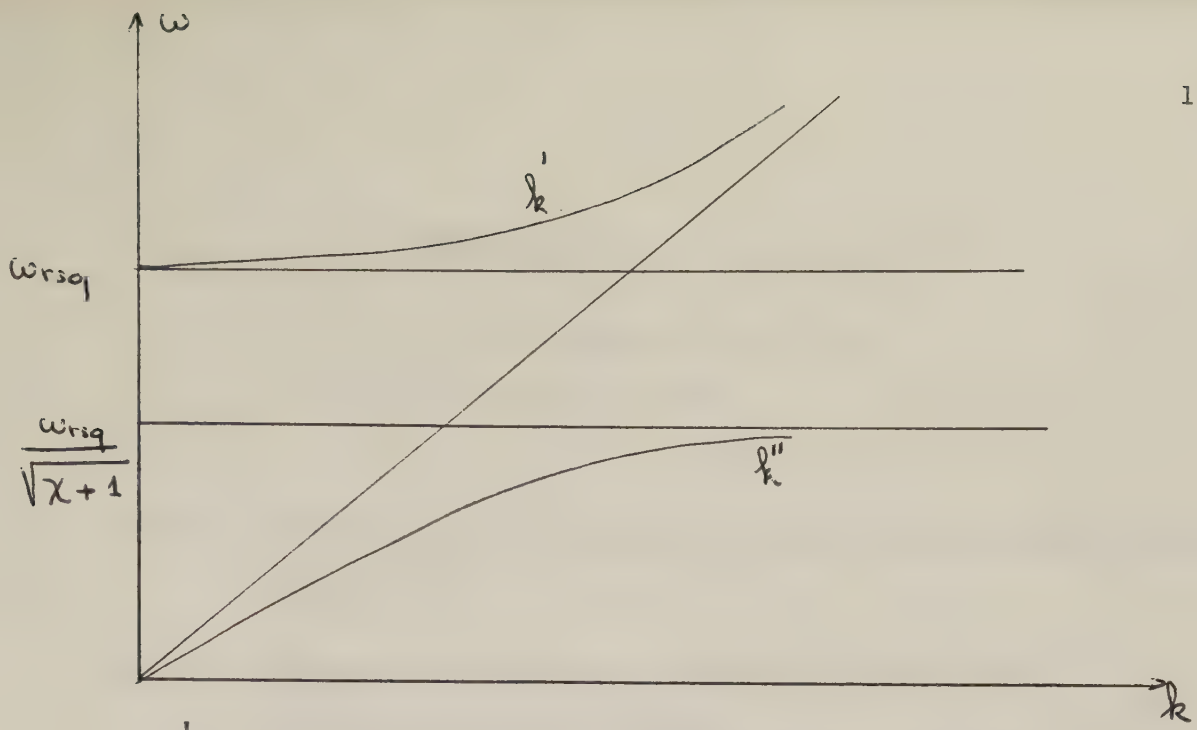
Le mode k" n'est plus représenter que par un point

$(\omega_{rsq}\ ,\ 0)$

$$k'' \to 0$$

$$k' \to \frac{\omega}{c}\left|\frac{a(a+\chi) + |a(a+\chi)|}{2(a+\chi)^2}\right|^{1/2}$$

Le diagramme ω, k prend alors l'allure suivante :



k' se scinde en deux branches avec la même configuration que dans le cas précédent, mais avec un gap.

Remarque :

La vitesse de phase ne s'annule jamais lorsque l'on introduit une vitesse de mode.

Je rappelle que ces modèles sont établis dans l'approximation des milieux continus et cesse donc d'être valables pour k grand.

ANNEXE III

Intégration du système d'équations aux dérivées partielles

III1 - Présentation du système d'équations et de ses conditions aux limites

III2 - Méthode de calcul et choix de l'algorithme
21 Présentation des problèmes
22 Présentation des méthodes d'intégration

III3 - Choix d'un algorithme réel
31 Stabilité : introduction
32 Cas de l'algorithme réel
33 Problème de démarrage

III4 - Intégration en dimension deux
41 Structure du calcul
42 Organigramme
43 Spécificité du programme
44 Vérification du calcul machine
45 Calculs effectués

III5 - Références de l'annexe III

IIII - Le système d'équations aux dérivéespartielles et ses conditions aux limites.

II Comme je l'ai énoncé dans le chapitre I nous avons été confrontés à un problème de résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. Le but de ce chapitre est de présenter les problèmes rencontrés ainsi que les solutions utilisées.

J'avais à résoudre le système d'équations aux dérivées partielles non linéaires suivant :

$$1 \qquad \frac{\partial A}{\partial t}\bigg|_z + c\frac{\partial A}{\partial z}\bigg|_t = -\alpha E$$

III A

$$2 \qquad \frac{\partial E}{\partial t}\bigg|_z = -\frac{E}{\tau} + AR$$

$$3 \qquad \frac{\partial R}{\partial t}\bigg|_z = -\frac{1}{\tau}(R+1) + AE$$

Ce système est la forme simplifiée de l'équation de propagation du son dans l'hélium 3 superfluide en phase B en présence du mode de real squashing proposée par Sauls (6).

Le but de ce calcul, est de comparer cette simulation numérique aux résultats expérimentaux observés, à Cornell (1).

Les conditions aux limites du système sont donc fixées par le dispositif expérimental.

On approximera le signal émis à l'aide de fonctions analytiques simples.

a) une cosécante hyperbolique gaussienne $A(z,t)$ s'écrit alors

$$A(z = 0,t) = \frac{\pi . S}{\cosh(t)}$$

ou

$$A(z = 0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp - t^2$$

Ce qui revient à modéliser le quartz par un système du 2° ordre approximativement.

b) Exponentielle croissante-décroissante

$A(z = 0,t)$ s'écrit alors :

$A(z = 0,t)$ $(1 - \exp(-t/\tau))$

pour $t_o < t < t_1$ et

$A(z = 0,t) = K \exp - \frac{(t - t_1)}{\tau}$ pour les temps supérieurs à t_1

Il ne reste plus qu'à fixer l'échelle des deux paramètres τ et c soit le coefficient d'amortissement et la vitesse du son respectivement.

Ainsi on prendra pour τ des valeurs comprises entre $1\mu s$ et $100\ \mu s$, pour c on prendra essentiellement sa valeur à 24 bars soit 375.1 m/s (5).

Enfin la quantité qui fixera l'amplitude de l'excitation sera en fait la surface totale de l'enveloppe soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\ (z,t)\ dt$$

On fera varier cette surface de 0,001 à $15\ 2\pi$

Lorsque le système n'est pas perturbé par l'onde, il sera supposé dans un état d'équilibre homogène et isotrope et donc quelque soit z on a

$$A(z,t) = 0$$

$$E(z,t) = 0$$

$$R(z,t) = -1$$

pour tout t inférieur à t_o temps d'émission de l'impulsion.

III2 - Méthode de calcul et choix de l'algorithme

21 - Présentation des problèmes

On recherche le couple u, w tel que

$$\left.\frac{\partial A}{\partial w}\right|_u = -\alpha E$$

Prenons le couple u,w tel que $z = c\,(u-t)$ et $w = t$

En écrivant la dérivée $\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_z$ sous la forme d'un jacobien, on a :

$$\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_z = -\frac{\partial(A,z)}{\partial(z,t)} = -\frac{\partial(A,z)}{\partial(u,t)} \cdot \frac{\partial(u,t)}{\partial(z,t)}$$

$$= -\begin{vmatrix} \left.\frac{\partial A}{\partial u}\right|_t & \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_u \\ \left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_t & \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_u \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_t & \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_z \\ \left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_t & \left.\frac{\partial t}{\partial t}\right|_z \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \left.\frac{\partial A}{\partial u}\right|_t & \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_u \\ -c & +c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1/c & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

soit $$\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_z = \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_u + \left.\frac{\partial A}{\partial u}\right|_t$$

De même pour la dérivée par rapport à z :

$$\left.\frac{\partial A}{\partial z}\right|_t = \frac{\partial(A,t)}{\partial(z,t)} = \frac{\partial(A,t)}{\partial(u,t)} \cdot \frac{\partial(u,t)}{\partial(z,t)}$$

Soit après calcul

$$\left.\frac{\partial A}{\partial z}\right|_t = \frac{-1}{c} \left.\frac{\partial A}{\partial u}\right|_t$$

Et donc AIII A1 s'écrit :

$$\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_z + c \left.\frac{\partial A}{\partial z}\right|_t = \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_u + \left.\frac{\partial A}{\partial u}\right|_t - \frac{c}{c} \left.\frac{\partial A}{\partial u}\right|_t$$

$$\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_u = -\alpha E$$

D'où le système après changement de variable :

III C

1 $$\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_u = -\alpha E$$

2 $$\left.\frac{\partial E}{\partial t}\right|_z = -\frac{E}{\tau} - AR$$

3 $$\left.\frac{\partial R}{\partial t}\right|_z = -\frac{1}{\tau}(R + 1) + AE$$

Ainsi AIIICl peut s'intégrer comme une équation différentielle ordinaire le long de la famille de droite u égale constante.

On peut maintenant représenter le plan d'intégration du système dans la base (u,t).

Les droites z égale constante s'écrivent alors $u - t = K$ (avec K constant)

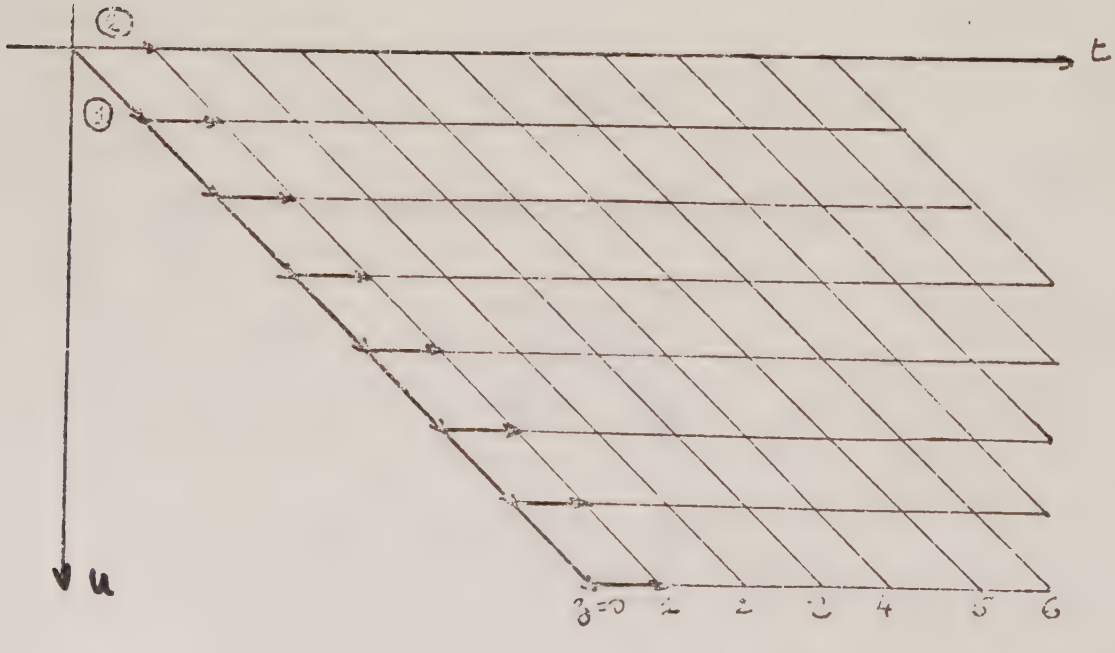


Fig. 2

La conditions initiale du problème c'est à dire la forme de l'impulsion émise par le quartz, se trouve sur la droite $z = 0$

Le plan d'intégration étant établi on peut imaginer la stratégie de calcul suivante :

1 $A(0,t)$ quelque soit t , $E(0,0)$ et $R(0,0)$ sont connues. On utilise AIIIC2 et AIIIC3 que l'on intègre le long de $z = 0$ pour toutes les valeurs de t sur cette droite : On a ainsi $E(0,t)$ et $R(0,t)$ quelque soit t

2 On connaît maintenant $A(0,t)$, $E(0,t)$ et $R(0,t)$. quelque soit t on peut alors utiliser IIIC1 pour connaître $A(\Delta z, t)$ quelque soit t

$A(\Delta z, t)$ est maintenant connue on peut appliquer à nouveau 1 pour connaître $E(\Delta z, t)$ et $R(\Delta z, t)$ puis 2 pour $A(2\Delta z, t)$ et ainsi de suite.

L'algorithme progresse donc en passant à chaque pas d'une droite $z = z_o$ à une droite $z = z_o + \Delta z$ et donc pave le plan d'intégration (u, t) de parallélogramme de longueur T_o (temps d'observation maximal) et de côté Δz

Il est ainsi possible d'utiliser des algorithmes de résolution d'équations différentielles ordinaires. Les deux principaux algorithmes de ce type sont la méthode de Runge Kutta et la méthode dit des prédictions corrections.

22 Présentation des méthodes d'intégration

221 La méthode de Runge Kutta

Les informations principales concernant cet algorithme ont été tirées du livre MATHEMATICAL METHODS FOR DIGITAL COMPUTERS (2), l'on pourra s'y rapporter pour de plus amples détails. Je peux cependant dire que cette méthode à pour but d'obtenir une solution numérique approximative à des systèmes d'équations du type

$$y_i' = f_i\ (x,\ y_1,\ ..y_i,\ ...y_n).$$

l'algorithme est obtenu à l'aide de la formule de Taylor, et pour une équation unique

$$y = f\ (y,x)$$

il s'écrit

$$K = \frac{1}{6}\ K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4$$

avec

$$\bar{K} = \int_{x_o}^{x_o + h} f(x)\ dx$$

et

$$K_1 = hf\ (x_o,\ y_o)$$

$$K_2 = hf\ (x_o + \frac{h}{2}\ ,\ y_o + K_1/2)$$

$$K_3 = hf\ (x_o + \frac{h}{2}\ ,\ y_o + K_2/2)$$

$$K_4 = hf\ (x_o + h,\ y_o + K_3).$$

avec h pas du calcul.

Inconvénients

- L'intégration nécessité la connaissance analytique de F (y,x)
- La méthode ne permet pas de quantifier l'erreur.
- 4 formules intermédiaires sont nécessaires pour chaque pas de calcul.

Avantages

- La méthode est stable.
- Elle peut être utilisée dès le premier point et ne nécessite donc pas d'algorithme de démarrage.
- Il est facile de changer le pas dans un programme.

222 Méthode dit de prédiction correction

Les informations ont été tirées de deux livres Milne (3) pour une bonne introduction du problème et HAMMINGS (4) pour une étude théorique plus détaillée.

Pour résumer la méthode on considère une équation différentielle du premier ordre de la forme suivante :

$$y' = f(x,y)$$

Soit y_{n+1} la valeur que prend une solution $y(x)$ au point x_{n+1}

On calcule y_{n+1} par la relation

III D

$$1 \quad y_{n+1} = A_o\, y_n + A_1\, y_{n-1} + A_2\, y_{n-2} + h \left| B_o\, y'_n + B_1\, y'_{n-1} + B_2\, y'_{n-2} + B_3\, y'_{n-3} \right|$$

$$2 \quad y_{n+1} = a_o\, y_n + a_1\, y_{n-1} + a_2\, y_{n-2} + h \left| b_{-1}\, y'_{n+2} + b_o\, y'_n + b_1\, y'_{n-1} + b_2\, y'_{n-2} \right|$$

L'algorithme IIID1 calcule y_{n+1} en fonction des 3 points précédents et est appelé prédicteur : l'algorithme IIID2 calcule y_{n+1} en fonction de la dérivée première de y_{n+1} est appelé correcteur il suppose la connaissance approximative de y_{n+1} qui est donné par IIID1. La méthode consiste donc à calculer y_{n+1} par IIID1 d'utiliser cette valeur pour calculer y'_{n+1} par l'équation différentielle ce qui permet d'appliquer IIID2.

Les inconvénients de cette procédure prédiction correction sont les suivants :

- la méthode nécessité plusieurs points pour être utilisée il faut donc trouver un algorithme de départ.
- elle est difficile à programmer
- elle peut devenir très instable.

Elle présente par contre de notables avantages :
- l'erreur de calcul est plus faible
- la différence entre le prédicteur et le correcteur permet d'évaluer l'erreur de calcul et permet donc un contrôle sur le pas de calcul
- deux calculs seulement sont effectués à chaque pas.

Remarque :

Les valeurs des coefficients a_o, a_1.... et A_o, A_1.. n'ont pas été données car si la structure de l'algorithme est invariante il existe de nombreuses versions avec des coefficients différents.

Conclusion :

Je rappelle qu'il s'agissait d'intégrer sur des distances moyennes et en 2 dimensions des solutions de types exponentielles . Il m'a donc fallu un algorithme rapide et précis. Mon choix s'est porté sur la méthode de prédiction correction qui, tout en donnant des garanties de précision et de rapidité, a nécessité l'étude détaillée des problèmes de stabilité et de démarrage de l'algorithme.

IV3 - Choix d'un algorithme réel

31 Stabilité : introduction simple

Je raisonnerais pour commencer sur une formule à deux points.

311 Cas du prédicteur

Soit donc la formule

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h\, y'_n$$

Onpose : - $z(x)$ solution analytique de l'équation différentielle

$$z'(x) = f(x, z)$$

- y_n valeur calculée par intégration numérique

soit $y'_n = f(x, y_n)$.

- ε_n l'erreur de calcul au nieme point

$$\varepsilon_n = z_n - y_n$$

soit $\varepsilon'_n = z'_n - y'_n = f(x, z_n) - f(x, y_n)$.

$$\varepsilon'_n = \frac{\partial f(x, \Theta)}{\partial y} \varepsilon_n = A\varepsilon_n$$

On suppose $\frac{\partial f(x,\Theta)}{\partial y}$ constant et égal à A

en plaçant z_n dans l'algorithme de prédiction on a :

III E 1 $$z_{n+1} = z_{n-1} + 2h\, z'_n + e_n$$

avec e_n erreur de l'algorithme (e_n est supposé constant)

Par définition

III E 2 $$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h\, y'_n$$

donc en soustrayant III E1 et III E2 membre à membre il vient :

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n-1} + 2h\,\varepsilon'_n + e_n$$

ou

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n-1} + 2Ah\,\varepsilon_n + e_n$$

Cette équation qui caractérise la propagation de la différence entre la valeur réelle z.. et la valeur calculée y caractérise bien la stabilité du système.

L'équation caractéristique de l'équation aux différences finies est

$$\rho^2 - 2A\,h\,\rho - 1 = 0.$$

La solution générale est de la forme :

$$\varepsilon_n = C_1\,(\rho_1)^n + C_2\,(\rho_2)^n$$

avec

$$\rho_1 = Ah + \sqrt{A^2h^2 + 1}$$

$$\rho_2 = Ah - \sqrt{A^2h^2 + 1}$$

On suppose Ah petit devant 1 ce qui nous permet d'écrire le développement limité des ρ_i

$$\rho_1 = 1 + Ah + \frac{(Ah)^2}{2} + \ldots.$$

$$\rho_2 = - [1 - Ah + \frac{(Ah)^2}{2} + \ldots.]$$

On voit donc que jusqu'au second ordre les ρ_i peuvent s'approximer par une fonction exponentielle on écrira :

$$\rho_1 = e^{Ah}$$

$$\rho_2 = -e^{-Ah}$$

Discutons la convergence des solutions :
Si A est positif alors ρ_1 est supérieur à un et si A est négatif c'est ρ_2 qui est supérieur à un.

Dans un cas comme dans l'autre l'expression diverge lorsque n tend vers l'infini, l'algorithme prédicteur est donc instable.

312 Cas du correcteur

On a

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (y'_{n+2} + y'_n)$$

par le même raisonnement que précédemment on trouve l'équation de propagation de l'erreur suivante :

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{Ah}{2} (\varepsilon'_{n+1} - \varepsilon'_n).$$

D'où l'équation caractéristique

$$(1 - \frac{Ah}{2}) \quad \rho - (1 + \frac{Ah}{2}) = 0.$$

et donc

$$\rho = \frac{1 + Ah/2}{1 - Ah/2}$$

$$\varepsilon_n = C . \rho^n$$

de la même façon que précédemment en supposant Ah petit ρ s'écrit :

$$\rho = 1 + Ah + \frac{(Ah)^2}{2} + \frac{(Ah)^3}{4} + \ldots.$$

et donc avec une erreur du troisième ordre.

$$\rho = e^{Ah}$$

Ainsi pour $A > 0$ on a divergence de l'erreur et pour $A < 0$ il y a convergence de l'erreur.

J'ai jusqu'à présent parlé d'erreur absolue et fondé nos critères sur cette erreur mais en fait il importe peut que l'erreur croisse si la solution croit au même rythme . Ce qui est important c'est de ne pas avoir une solution réelle décroissante alors que l'erreur croit. C'est pourquoi il est nécessaire de parler d'erreur relative et de fonder nos critères de stabilité sur cette notion.

Donc en approximant les courbes réelles par des exponentielles $(\exp (Ah)^n)$ le critère de convergence sera désormais :

$$\varepsilon_n \exp - (Ah)^n < 1$$

Donc pour le prédicteur on a :

$$\varepsilon_n e^{-Ah\, n} = C_1 + C_2 e^{-2\, Ah\, n}$$

Ainsi pour A positif, il n'y a pas de problème de stabilité mais pour A négatif la solution peut devenir instable.

Cas du correcteur

$$\varepsilon_n \, e^{-Ah\,n} = C$$

Le correcteur est stable quelque soit la configuration.
La discussion précédente a donc montré que le critère réel est la stabilité de l'erreur relative et que celle-ci ne pose réellement de problème que pour A négatif.

32 Cas de l'algorithme réel

321 Présentation

J'ai pris le cas de l'algorithme, le plus couramment employé c'est-à-dire l'algorithme prédicteur correcteur à 7 constantes soit à 4 points :

$$1 \quad y_{n+1} = A_o\, y_n + A_1\, y_{n-1} + A_2\, y_{n-2} + h\,[B_o\, y'_n + B_1\, y'_{n-1} + B_2\, y'_{n-2} + B_3\, y'_{n-3}] + \frac{E_m h^m\, y^{(m)}}{m\,!}\,(0) \qquad \text{III D}$$

$$2 \quad y_{n+1} = a_o\, y_n + a_1\, y_{n-1} + a_2\, y_{n-2} + h\,[b_{-1}\, y'_{n+1} + b_o\, y'_n + b_1\, y'_{n-1} + b_2\, y'_{n-2}] + E'_m\, \frac{h^m\, y^{(m)}}{m\,!}\,(0)$$

Cet algorithme a été introduit lors de la présentation de la méthode on peut remarquer que h est le pas de calcul. et que pour le prédicteur $(E_n h^m y^{(m)}(0))/m !)$ représente la majoration de l'erreur de calcul à chaque pas, $y^{(m)}(0)$ est la valeur de la dérivée m ieme de la fonction pour une valeur Θ comprise entre le point n et le point n + 1 calculé, E_m est un coefficient qui dépend de la valeur des A_i, B_i.

On peut faire les mêmes remarques pour l'algorithme correcteur IIID2 que pour l'algorithme prédicteur : il est à noter que E'_m est différent de E_m ainsi que Θ' est différent de Θ.

322 Contraintes du calcul réel

Les équations générales étant établies il nous faut calculer les valeurs des coefficients a_i b_i et A_i B_i
On pourrait par exemple dire que les relations ayant 7 coefficients, l'algorithme est exact pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 6, ce qui nous donne 7 équations à 7 inconnues en prenant par exemple les polynomes 1, x , x^2, x^3, x^4, x^5, x^6.

Ceci revient en fait à calculer tous les coefficients sur des critères de précision.

En effet on a alors m = 7 et la précision calculée est fonction de la dérivée septième de la fonction.

Pour un algorithme réel il faut tenir compte des autres problèmes que posent le calcul numérique, c'est-à-dire l'erreur d'arrondi (due à la précision de calcul de la machine) la précision de l'algorithme cité plus haut et la stabilité de l'algorithme.

Des trois problèmes cités, seule l'erreur d'arrondi n'a pas été introduite. C'est une notion que je n'ai trouvé présentée dans aucun ouvrage, on se contente d'introduire le terme Na dit d'amplification du bruit d'arrondi tel que :

$$N_a = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}$$

Il s'agit donc de minimiser ce terme.

Remarque :

Pour Ah = 0 (soit une solution d'erreur constante) une théorie a été développée et l'on parle de N_c critère plus précis.

$$N_c = \frac{1}{a_1 + 2a_2 + 1}$$

Puisque nos solutions ne peuvent être supposées lentement variables on utilisera uniquement N_a.

Les termes N_a et N_c ont été présentés pour le correcteur mais de façon symétrique on peut parler de :

$$N_a = [A_1^2 + A_2^2 + A_3^2]^{1/2}$$

et pour Ah = 0

$$N_c = \frac{1}{A_1 + 2A_2 + 1}$$

pour le prédicteur.

Les contraintes sur le coefficients seront donc triples

- précision, diminuer E_m et E'_m
- bruit d'arrondi : minimiser N_c
- stabilité : obtenir la stabilité pour la plus grande valeur de $|Ah|$ possible Ah étant négatif.

323 Application à un algorithme à 7 points

Introduisons donc ces critères dans le calcul d'un correcteur à sept points :

$$y_{n+1} = a_o\, y_n + a_1\, y_{n-1} + a_2\, y_{n-2} + h\ [b_{-1}\, y'_{n+1} + b_o\, y_n + b_1\, y'_{n-1} + b_2\, y'_{n-2}] + \frac{E_m\, h^m y^{(m)}(0)}{m\ !}$$

Des 7 coefficients, 5 seront utilisés pour la précision les deux autres seront utilisés pour minimiser le bruit d'arrondi et obtenir une bonne stabilité.

Donc, en premier lieu on écrit que l'algorithme prédicteur est solution exacte des polynomes de degré inférieur à cinq ce qui nous laisse deux paramètres a1 et a2 par exemple.

Tout calcul fait on trouve :

$$a_o = 1 - a_1 - a_2 \qquad b_o = \frac{1}{24}\,(19 + 13\,a_1 + 8a_2)$$

$$a_1 = a_1 \qquad b_1 = \frac{1}{24}\,[-5 + 13a_1 + 32a_2]$$

$$a_2 = a_2 \qquad b_2 = \frac{1}{24}\,[1 - a_1 + 8a_2]$$

$$b_{-1} = \frac{1}{24}\,(9 - a_1)$$

$$E_5 = -\frac{1}{6}\,(-19 + 11a_1 + 8a_2)$$

on a évidemment m = 5 le terme d'erreur s'écrira

$$\frac{E'_5\, h^5\, y^{(5)}\,(0')}{5\ !}$$

Les contraintes de précision étant prises en ligne de compte passons à la stabilité.

En utilisant la même démarche que précédemment on a :

$$\varepsilon_{n+1} = a_o\varepsilon_n + a_1\,\varepsilon_{n-1} + a_2\,\varepsilon_{n-2} + h\,[b_{-1}\,\varepsilon'_{n+1}$$

$$+ b_o\,\varepsilon'_n + b_1\,\varepsilon'_{n-1} + b_2\,\varepsilon'_{n-2}] + e_n.$$

Avec ε_n différence entre la solution analytique réelle et le point calculé par intégration numérique et en erreur de l'algorithme au point n.

Comme précédemment, en mettant ε_{n-i} en facteur et en remplaçant ε'_n par $A\varepsilon_n$, on obtient l'équation caractéristique suivante :

$$Ah = \frac{\rho^3 - a_o\rho^2 - a_1\rho - a_2}{b_{-1}\rho^3 + b_o\,\rho^2 + b_1\rho + b_2}$$

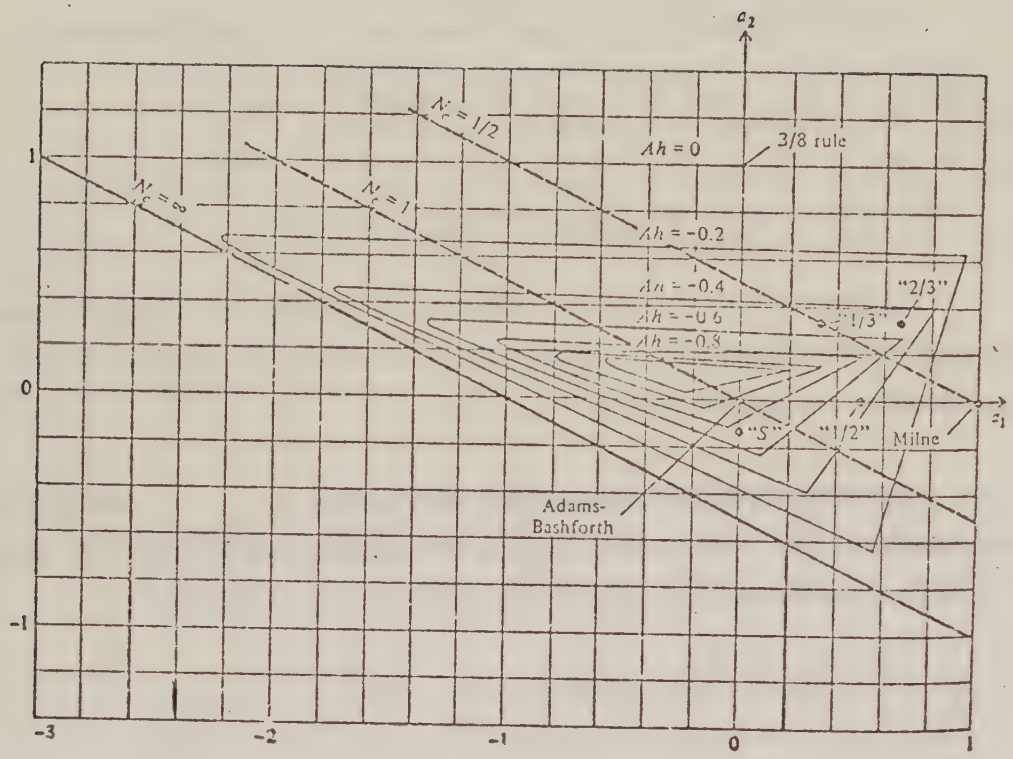
avec

$$\varepsilon_n = C_1\,(\rho_1)^n + C_2(\rho_2)^n + C_3(\rho_3)^n$$

Le système admet 3 solutions et je rappelle que le critère de stabilité est :

$$\rho_i\, e^{-Ah} < 1 \quad \forall i \in [1,2,3]$$

Les valeurs des ρ_i ne dépendent en fait que des coefficients a1 et a2 puisqu'en imposant une précision du cinquième ordre on a réduit les paramètres de 7 à 2.


a_2
$N_c = 1/2$
$N_c = 1$
$N_c = \infty$
$\lambda h = 0$
3/8 rule
$\lambda h = -0.2$
$\lambda h = -0.4$
$\lambda h = -0.6$
$\lambda h = -0.8$
"2/3"
"1/3"
"S"
"1/2"
Milne
Adams-
Bashforth
a_1
1
0
-1
-3
-2
-1
0
1

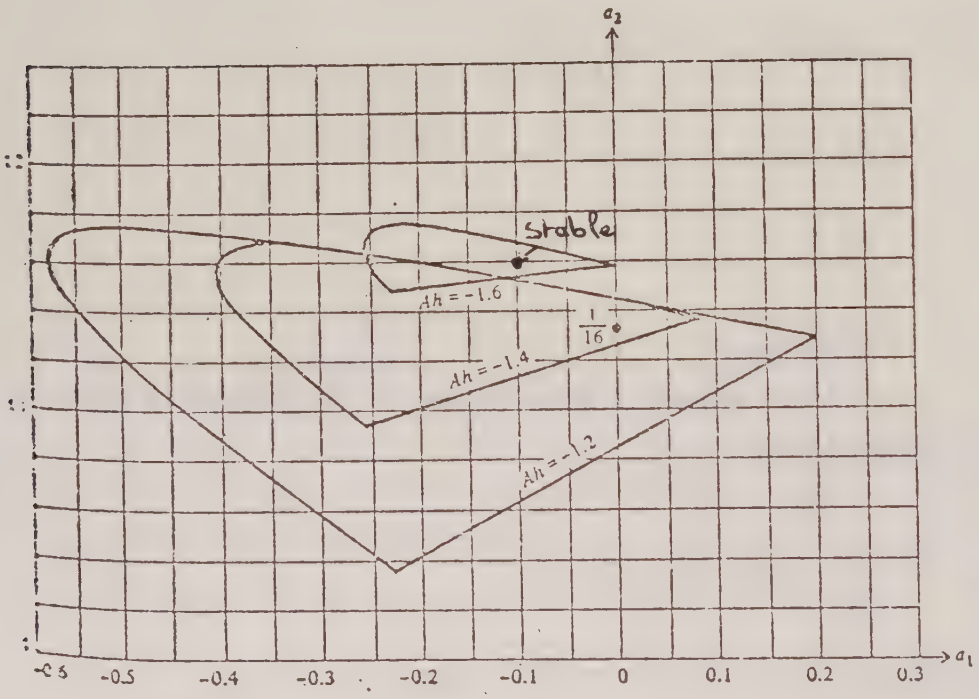

a_2
stable
$\lambda h = -1.6$
$\frac{1}{16}$
$\lambda h = -1.4$
$\lambda h = -1.2$
a_1
-0.6
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3

Fig. 3

On peut donc tracer un plan a_1 a_2 et à Ah fixé les courbes limites tel qu'il existe une solution égale à 1 les autres étant inférieures à 1. fig (3).

Les courbes ainsi tracées sont constituées d'une droite d'un côté et d'une hyperbole de l'autre pour les fortes valeurs de Ah. La zone ainsi délimitée peut être assimilée à un triangle.

Ainsi par exemple si l'on a Ah min = 0,6 toutes les valeurs des ai comprises dans le "triangle" Ah = 0,6 permettent la stabilité de l'algorithme.

On voit que plus Ah est négatif et plus les contraintes deviennent sévères.

Les points annotés " " correspondent à la position dans le diagramme des divers algorithmes prédicteur correcteurs à 7 constantes.

Les courbes Nc = 1, 1/2 , ∞ correspondent au lieu de a_1 et a_2 où Nc est constant. Je rappelle que Nc est un critère d'amplification de bruit d'arrondi pour Ah = 0 uniquement il ne nous intéresse donc pas.

334 Choix définitif

Il est maintenant possible de faire un choix entre les divers algorithmes existant en fonction des trois contraintes précision-stabilité-bruit d'arrondi. Les algorithmes les plus répandus sont ceux les suivants :

- Adams Bashforth
- 1/2
- Milme
- 2/3
- 1/3
- 3/8

Reportons dans un tableau les valeurs des coefficients des prédicteurs et correcteurs les valeurs de E5 et E'5 ainsi que les valeurs du coefficient d'amplification du bruit pour les principaux algorithmes existant.

	1/2	Milne	2/3	1/3	3/8	Bashforth	Stable
a_o / Ao	0,5 / 0,5	0 / 0	0 / 0	1/3 / 1/3	0 / 0	1 / 1	0,94 / 0,94
a_1 / A_1	0,5 / 0,5	1 / 1	2/3 / 2/3	1/3 / 1/3	0 / 0	0 / 0	-0,1 / -0,1
a_2 / A2	0 / 0	0 / 0	1/3 / 1/3	1/3 / 1/3	1 / 1	0 / 0	0,16 / 0,16
b-1 / B_3	17/48 / $\frac{-17}{48}$	1/3 / -1/3	50/144 / $\frac{191}{72}$	13/36 / $\frac{-13}{36}$	3/8 / -3/8	3/8 / -9/24	$\frac{9,1}{24}$ / $\frac{-455}{50\times24}$
b_o / B_o	17/16 / $\frac{119}{48}$	8/6 / 8/3	$\frac{182}{144}$ / $\frac{-107}{72}$	39/36 / $\frac{91}{36}$	9/8 / 21/8	$\frac{19}{24}$ / $\frac{55}{24}$	$\frac{949}{50\times24}$ / $\frac{2769}{50\times24}$
b_1 / B_1	1/16 / $\frac{-99}{48}$	1/3 / -5/3	86/144 / $\frac{109}{72}$	$\frac{15}{36}$ / $\frac{-63}{36}$	9/8 / -9/8	-5/24 / $\frac{-59}{24}$	$\frac{-59}{50\times24}$ / $\frac{-2789}{50\times24}$
b_2 / B_2	1/48 / 69/48	0 / 4/3	18/144 / $\frac{-25}{72}$	5/36 / $\frac{57}{36}$	3/8 / 15/8	1/24 / 37/24	$\frac{119}{50\times24}$ / $\frac{1939}{50\times24}$
E_5 / E'_5	-36/16 / 161/4	-8/6 / 116/3	$\frac{-344}{144}$ / $\frac{707}{18}$	-3 / $\frac{121}{3}$	-4,5 / $\frac{243}{6}$	$\frac{-76}{24}$ / $\frac{251}{6}$	$\frac{-1069}{300}$ / $\frac{12581}{300}$
$E'_5 - E_5$	$\frac{255}{6}$	$\frac{240}{6}$	$\frac{250}{6}$	$\frac{260}{6}$	$\frac{270}{6}$	$\frac{270}{6}$	$\frac{273}{6}$
Na	0,707	1	0,745	0,577	1	1	0,92

Les minuscules représentent les coefficients du correcteur les majuscules ceux du prédicteur.

On voit d'après le tableau que l'algorithme d'Adams Bashforth est le plus imprécis $\frac{270}{6}$ et a un des coefficients d'amplification du bruit d'arrondi les plus élevés.

Par contre il est stable jusqu'à des valeurs de Ah=-1 On utilisera cet algorithme pour la résolution de notre système car les problèmes de stabilité sont primordiaux : les erreurs d'arrondi sont minimisées par un calcul en double précision et les erreurs de précision sont suffisamment faible à l'ordre 5 (comme je l'ai constaté à postériori en faisant varier le pas de calcul).

A la lecture du tableau on peut remarquer également que l'on retrouve le compromis stabilité précision ainsi l'algorithme de Milme est le plus précis maisne supporte absolument pas de produit Ah négatif. De même j'ai établi un algorithme que j'ai appelé "stable" qui permet la stabilité du système jusqu'à Ah = 1,6 et l'on s'aperçoit qu'il est le moins précis.

Je ne parlerai pas des problèmes de stabilité de précision et d'arrondi du prédicteur parce qu'ils sont symétriques de ceux du correcteur . Des détails supplémentaires sur le choix d'un prédicteur ainsi que leurs calculs se trouvent dans le livre de HAMMINGS (4). Je dirais simplement que comme pour le correcteur on prend 5 coefficients pour la précision et 2 coefficients pour la stabilité et l'amplification du bruit d'arrondi.

Remarque :

On peut signaler l'existence d'algorithme plus précis. Soit P_c et C_n les points respectivement prédit et corrigé et y_n la valeur définitivement calculé. On a :

$$P_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1}}{2} + \frac{h}{48} \left(119\, y'_n - 99\, y'_{n-1} + 69\, y'_{n-2} - 17\, y'_{n-3}\right) + \frac{161}{480} h^5\, y^{(5)}(0)$$

$$m_{n+1} = p_{n+1} - \frac{161}{170} (p_n - c_n)$$

$$C_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1}}{2} + \frac{h}{48} \left(17\, m'_{n+2} + 51\, y'_n + 3\, y'_{n-1} + y'_{n-2}\right) - \frac{9}{480} h^5 y^{(5)}(0)$$

$$Y_{n+1} = C_{n+1} + \frac{9}{170} (P_{n+1} - C_{n+1}).$$

Le principe repose sur le fait que la différence entre le point prédit et le point corrigé nous donne l'erreur de calcul, cette information est utilisée pour corriger la valeur du point calculé suivant.

Ce sont des algorithmes très précis de stabilité équivalente à ceux précédemment calculés mais je ne les ai pas utilisés pour des raisons de temps de calcul et de complexité de la programmation.

- On pourrait utiliser également pour augmenter la précision des formules à plus de sept constantes, outre le fait que les calculs de stabilité deviennent lourds ceci n'améliorera pas significativement la principale limitation de ces algorithmes qui est des produits Ah négatif de l'ordre de l'unité.

- Cette étude élémentaire n'a permis d'introduire que les problèmes de calcul pour les algorithmes séparés.

Je n'ai pas trouvé de théorie traitant de l'interaction prédicteur correcteur et, bien sûr, encore moins de théorie traitant de l'interaction entre deux algorithmes prédicteurs correcteurs quand ceux-ci sont croisés comme pour le cas d'une intégration d'équations aux dérivées partielles.

J'ai simplement pu constater que dans le cas où les critères de stabilité introduit étaient respectés aucune erreur de calcul n'a été détectée.

33 Problème de démarrage

Comme je l'ai énoncé dans la présentation de la méthode, un de ses avantages est qu'elle ne peut démarrer seule. Ainsi pour calculer un point il nous faut connaître les trois précédentes valeurs de la fonction et les quatre précédentes dérivées. Ces sept données doivent donc être calculées par un autre algorithme pour les premiers points. Les algorithmes de démarrage les plus utilisés sont généralement Runge Kutta plus simplement des prédicteurs correcteurs ayant moins de points précédents mais englobant des dérivées seconde et même troisième, des points précédents pour ne pas perdre en précision. Ces dérivées étant obtenues en dérivant plusieurs fois la fonction analytique $y' = f(x,y)$

De nombreuses possibilités, sont offertes on peut citer en exemple le démarrage présenté par Milme (3) pour son algorithme à six coefficients Soit la valeur initiale connue on calcule y''_o et y''_o analytiquement d'où l'on déduit y'_1 et y'_{-1} par les relations :

$$y'_1 = y'_o + h\, y''_o$$

$$y'_{-1} = y'_o - h\, y''_o$$

On passe ensuite à l'étape suivante à l'aide des relations.

$$Y_{-1} = y_o + \frac{h}{24}(7\,y'_1 + 16\,y'_o + y'_{-1}) + \frac{h\,y''_o}{4} - \frac{1}{180}h^5\,y^{(5)}(0)$$

$$Y_{-1} = y_o - \frac{h}{24}(y'_1 + 16y'_o + 7y'_{-1}) + \frac{h\,y''_o}{4} + \frac{1}{180}\,h^5\,y^{(5)}(0).$$

$$Y_2 = y_o + \frac{2h}{3}(5y'_1 - y'_o - y'_{-1})\;2\,h^2\,y''_o + \frac{7}{45}h^5\,y^{(5)}(0)$$

Donc le démarrage prédicteur correcteur nécessite le calcul des dérivées nième du point de départ et la méthode Runge Kutta dont je rappelle l'algorithme.

$$\overline{K} = \frac{1}{6}\,(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$\overline{K} = \int_{x_o}^{x_o+h} f(x)\,dx.$$

$$K_1 = h\, f(x_o, y_o)$$

$$K_2 = h\, f(x_o + \frac{h}{2}, y_o + K_1/2)$$

$$K_3 = h\, f(x_o + \frac{h}{2}, y_o + K_2/2)$$

$$K_4 = h\, f(x_o + h, y_o + K_3).$$

nécessite comme on le voit la connaissance de la valeur de la fonction f pour $y_o + K_1/2$, $y_o + K_2/2$, $y_o + K_3$ soit des points à priori aléatoires sur le plan d'intégration.

En se rapportant à notre système l'on voit :

$$\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_u = - \alpha E$$

$$\left.\frac{\partial E}{\partial t}\right|_z = \frac{-E}{\tau} - AR$$

$$\left.\frac{\partial R}{\partial t}\right|_z = - \frac{1}{\tau} (R+1) + AE$$

qu'aucune des 2 possibilités ne convient. Dans le cas de la méthode prédiction correction si je calcule par exemple la dérivée seconde de l'équation IIIC1 en un point quelconque de la courbe

$$\left.\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right|_u = -\alpha \left.\frac{\partial E}{\partial t}\right|_u$$

E dépend d'un système d'équation et ne peut s'obtenir analytiquement. Les méthodes de prédiction correction à ordre de dérivée supérieur à un ne peuvent donc être employées.

Il en est de même pour la méthode de Runge Kutta : prenons par exemple le calcul de A sur la droite u égale constante.
Par analogie avec l'algorithme on a $f(x,y) = -\alpha E$
Les valeurs de $A + K_1/2$, $A+K_2/2$ et $A + K_3$
ne peuvent être obtenues puisqu'elles nécessitent l'intégration de deux autres équations différentielles sur des pas variables.

J'ai utilisé pour démarrer le système des formules de prédiction correction ne mettant en jeu que des dérivées premières et pour avoir un maximum de précision l'algorithme change à chaque point.

Cette méthode est la plus imprécise de toutes mais on a supposé la fonction très lentement variable au voisinage de l'origine.

Voici donc les formules que j'ai calculées le couple (y_o , y'_o) étant la condition initiale supposé connue.

Pour le 1° point :

$$P_1 \qquad y_1 = y_o + h\, y'_o$$

$$C_1 \qquad y_1 = y_o + \frac{h}{2}\,[3y'_o - y'_1]$$

Pour le 2° point

$$P_2 \quad y_2 = y_1 + \frac{h}{2}[3\,y'_1 - y'_o]$$

$$C_2 \quad y_2 = y_1 + \frac{h}{12}[5\,y'_2 + 8y'_1 - y'_o].$$

Pour le 3° point :

$$P_3 \quad y_3 = y_2 + \frac{h}{12}[23\,y'_2 - 16\,y'_1 + 5y'_o]$$

$$C_3 \quad y_3 = y_2 + \frac{h}{24}[9y'_3 + 19y'_2 - 5y'_1 + y'_o].$$

On possède alors quatre points et quatre dérivées premières soit respectivement les couples (y_o, y'_o) (y_1, y'_1) (y_2, y'_2) et (y_3, y'_3) on peut alors utiliser l'algorithme général.

Remarque :

Vu le nombre réduit de point utilisés et la vocation de ces algorithmes à ne servir qu'une seule fois sur chaque droite u égale constante et z égale constante les coefficients ont été calculés uniquement sur des critères de précision

IV4 - Intégration en dimension deux

41 Structure du calcul

Maintenant que l'algorithme est choisi on peut en se référant à la stratégie de calcul décrite en introduction paragraphe III2 définir la structure du programme.

Je rappelle que pour une intégration suivant u ou z

égale constante on a :

- utilisation des algorithmes de démarrage
P1 C1
P2 C2
P3 C3

- utilisation de l'algorithme général
soit Adams - Bashforth du cinquième point au dernier.

Cette structure sera constamment utilisée dans les deux sens d'intégration quoique de manière dissymétrique dans le programme.

La méthode d'intégration est la suivante :

1) Intégration de la condition initiale

$A(z = 0,t)$ le long de z pour obtenir E et R par les équations IIIC2 et IIIC3.

On peut représenter cette étape dans un espace à trois dimensions le plan horizontal est le plan (u,t) et l'axe vertical représente la valeur des grandeurs A R E

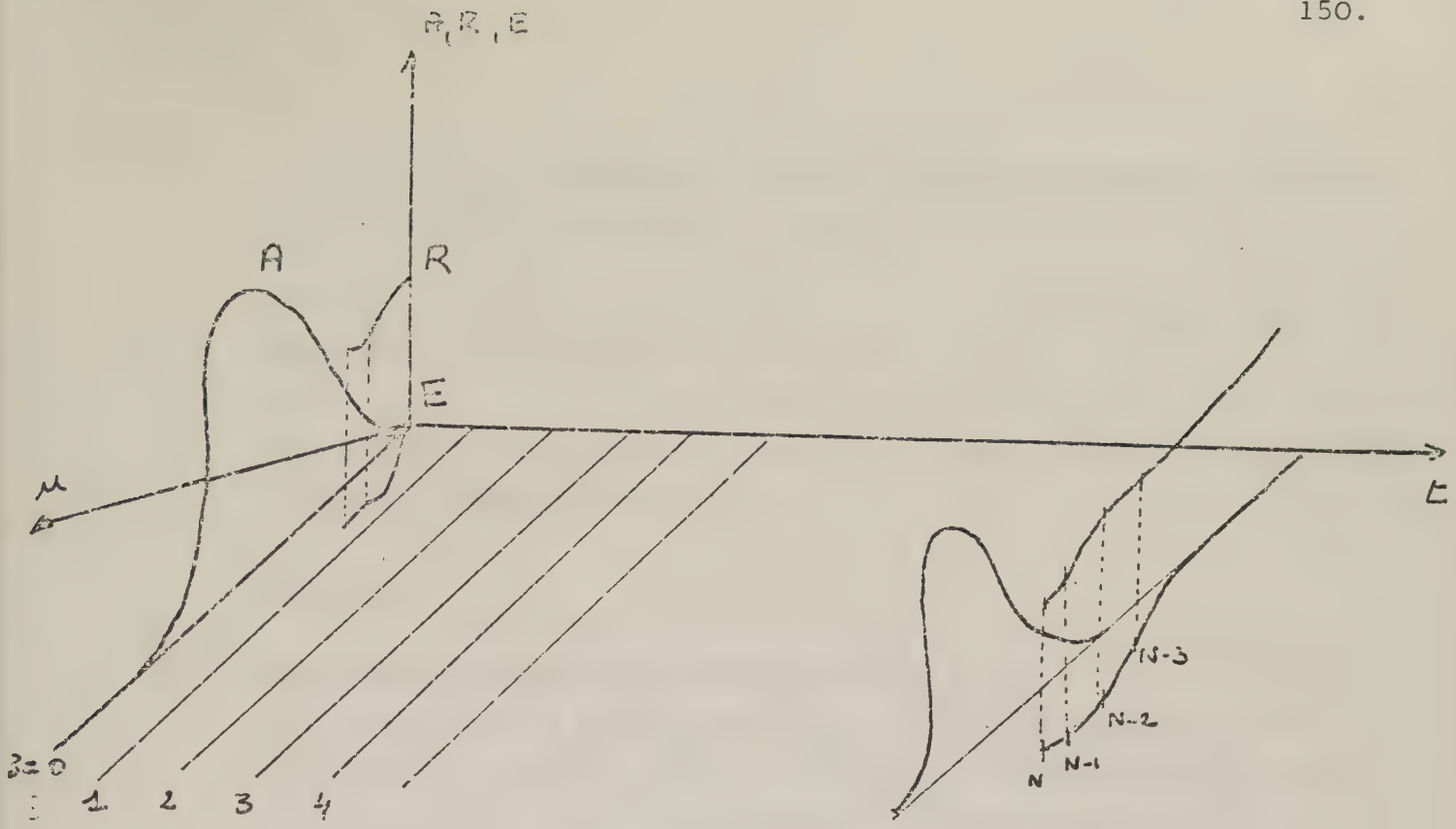


Fig. 5

Toutes les valeurs de 1 sont connues et l'on a :

$E\ (z=0, t=0) = 0$ et $R\ (z=0, t=0) = -1$

On utilise P1 C1 pour calculer E1 et R1
P2 C2 pour calculer E2 et R2, P3 C3 pour E3 et R3 puis l'algorithme général à partir du point 4 jusqu'à la fin. Les points 1, 2, 3, 4 de E et R sont représentés sur la figure.

2) Intégration de A à u égal constante

E et R étant connus maintenant le long de z = 0 de par l'intégration précédente, on va calculer l'allure de A sur $z = \Delta z$ soit un incrément plus loin grâce à IIIC1.

On peut comme précédemment représenter cette intégration dans l'espace constitué par le plan (u,t)

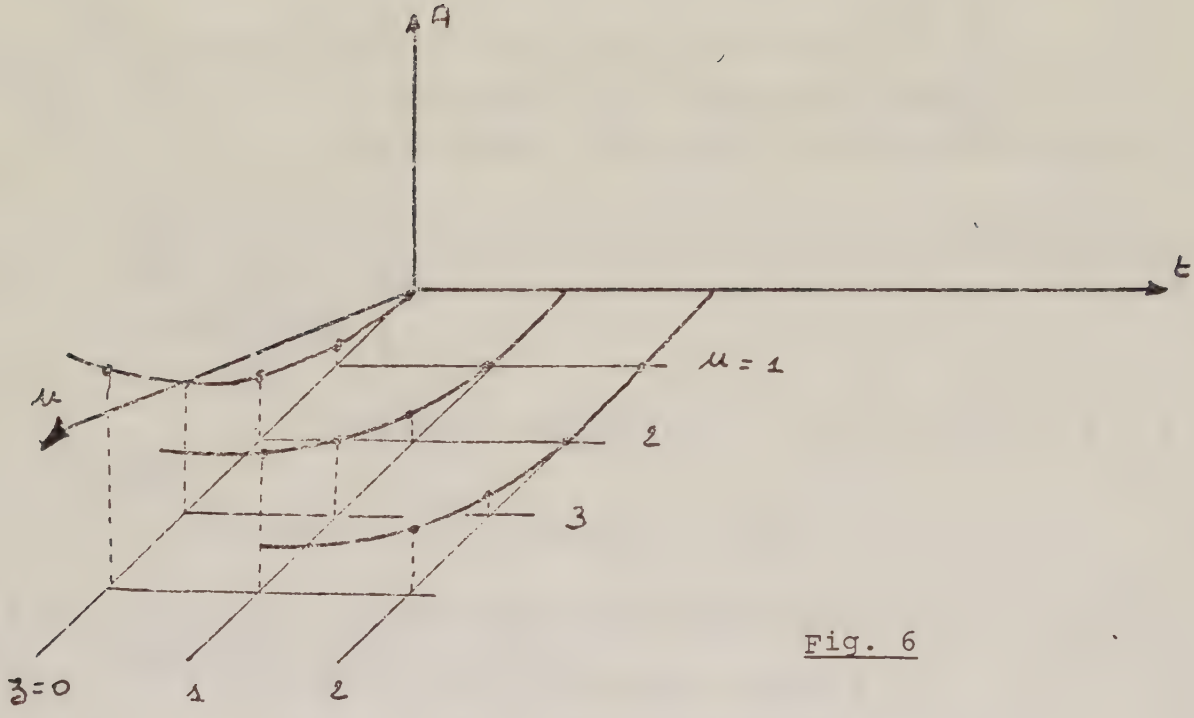


Fig. 6

Contrairement à l'intégration suivant E et R, on n'utilise pas les algorithmes de démarrage P1 C1, P2C2, P3C3 puis l'algorithme d'Adams - Bashforth car à égale constante on ne possède pour le calcul de A sur $z = \Delta z$ qu'un seul point précédent soit $A(z = 0,t)$ quelque soit t.
Donc pour le calcul de toutes les valeurs $A(z = \Delta z,t)$ on utilisera P1C1.

$A(z=\Delta z,t)$ étant maintenant connu on peut recommencer le cycle de calcul pour connaître $E\ (z=\Delta z,t)$
et $R\ (z=\Delta z,t)$
puis on calculera $A\ (z=2\Delta z,\ t)$ par l'algorithme P2C2 d'où par le premier cycle $E\ (z=2\Delta z,\ t)$
et $R\ (z=2\Delta\ z,\ t)$ et ainsi de suite. Ce n'est qu'à partir de la droite $z=4\Delta z$ que l'on pourra utiliser l'algorithme général d'Adams Bashforth.

Remarque :

Notons que cet algorithme nécessité la connaissance des quatre derniers points ce qui se traduit lors de l'intégration dans les deux dimensions par la connaissance de huit tableaux de valeurs (soit A et E) pour toutesles valeurs de sur les quatre dernières droites z égale constante.

Alors que l'intégration deE et R ne nécessité que la connaissance des quatre dernières valeurs de R et de E soit 8 valeurs.

La figure (5) représente sur une droite z=kl l'intégration de E et R connaissant l'allure de A sur la droite z = kl le point n + 1 de E ou R est calculé en fonction des valeurs de n, n-1, n-2, n-3 de E,A,R.

42 Organigramme

La méthode de calcul étant définie il ne me reste plus qu'à préciser l'organigramme et ses contraintes sur la programmation. Le caractère dissymétrique de l'intégration introduit dans le paragraphe précédent me conduit à utiliser l'intégration de IIIC2 et IIIC3 en sous programme. L'organigramme de ce sous programme est présenté fig (7).

Sous Programme

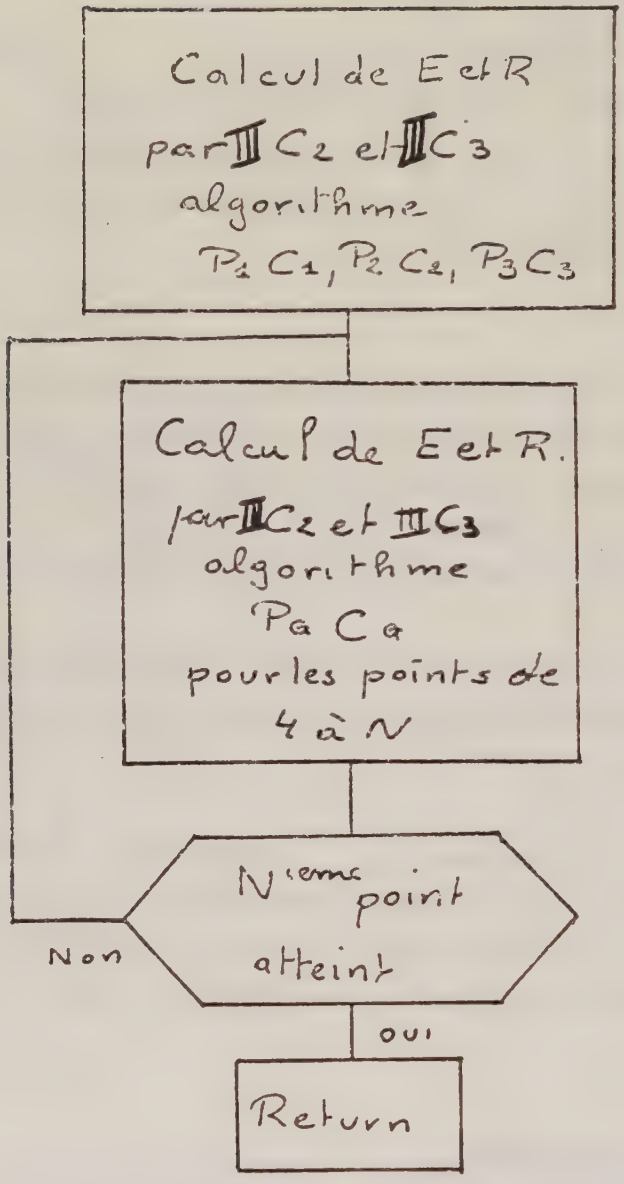


Fig. 7

Présentation du sous programme d'intégration à z = Cte

Le programme principal gère la progression de A sur les droites z égale constante et est présenté fig (8)

M est le nombre de pas d'intégration à u égale constante soit le nombre de droites z égale constante calculées.

Le principe de l'organigramme étant établi passons maintenant aux contraintes pratiques qu'il impose. Notamment établissons plus précisément la succession et l'intéraction des divers algorithmes.

En effet dans lesorganigrammes présentés précédemment les intégrations de A E et R étaient différenciées. On verra qu'en fait les calculs sont intimements liés et que la structure de l'algorithme prédicteur correcteur ne permet pas beaucoup de liberté.

Ainsi on va d'abord regarder l'interaction de E et R puis celle du groupement E R avec A.

Puisque l'intégration est en dimension deux les valeurs de A E et R seront doublement indicées. L'indice n indique l'appartenance à une droite z égale constante et se rapporte donc à toute les valeurs du temps de O à N. L'indice, m indique l'appartenance à une droite ⊦ égale constante et se rapporte à toutes les valeurs de z de 0 à M.

On se place dans la situation où la valeur de A est connue sur la droite $z = m\,\Delta z$ et où l'on veut E et R sur cette droite par application des équations IIIC2 et IIIC3 on a sur $z = m\,\Delta z$ les conditions initiales suivantes $E(z = m\,\Delta z, 0) = 0$

$R(z = m\,\Delta z, 0) = 1$

On suppose l'algorithme en régime établi, c'est-à-dire que le problème du démarrage est régle et il s'agit de calculer sur la droite $z = m\,\Delta z$ le n + 1ième point de E ou de R connaissant les n-ième

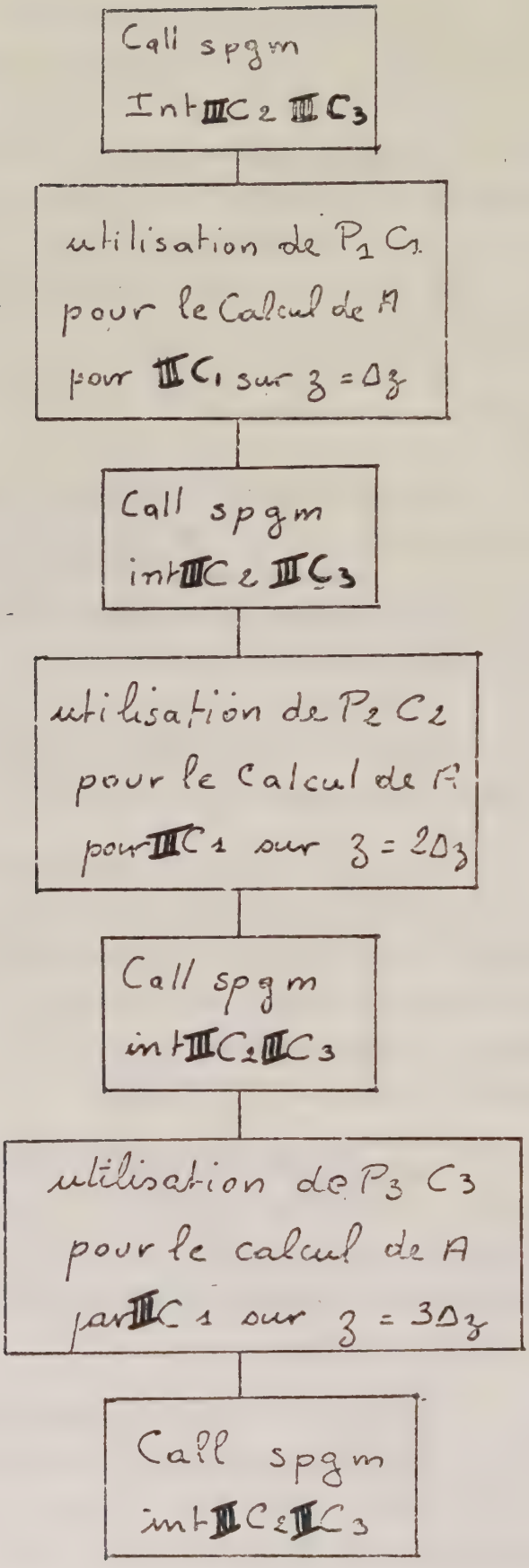

Call spgm
Int III C2 III C3
utilisation de P1 C1
pour le Calcul de A
pour III C1 sur z = Δz
Call spgm
int III C2 III C3
utilisation de P2 C2
pour le Calcul de A
pour III C1 sur z = 2Δz
Call spgm
int III C2 III C3
utilisation de P3 C3
pour le calcul de A
par III C1 sur z = 3Δz
Call spgm
int III C2 III C3

Fig. 8

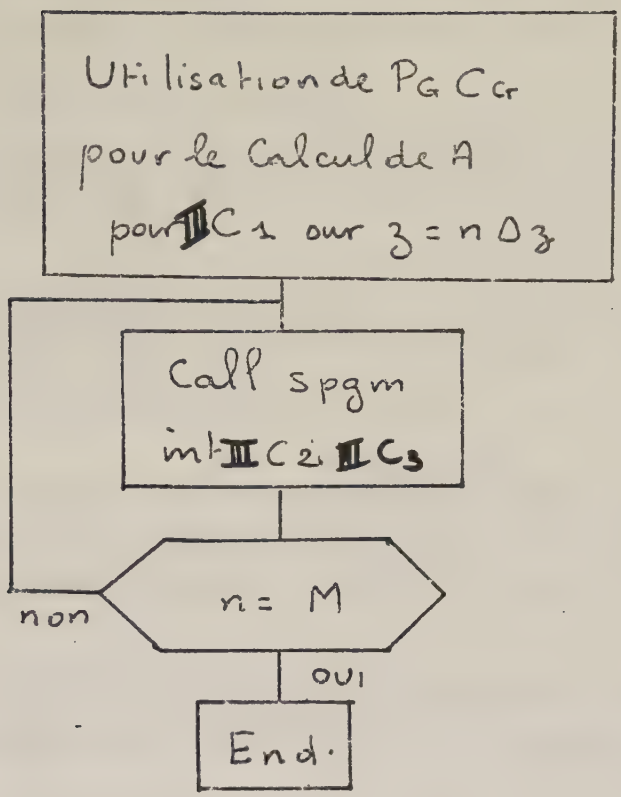


Fig. 8 : Programme d'intégration principale
Le sous programme d'intégration de C_2 et C_3 est présenté Fig. 7.

Ecrivons l'algorithme de prédiction pour E et R.

$$E(n+1,m) = A_o\, E(n,m) + A_1 (En-1,m) + A_2\, E(n-2,m)$$
$$+ h\,[B_o\, E'(n,m) + B_1\, E'\,(n-1,m) + B_2\, E'(n-2,m)$$
$$+ B_3\, E'\,(n-3,m)].$$

$$R(n+1\ m) = a_o\, E(n,m) + a_1\, R(n-1,m) + a_2\, R(n-2,m)$$
$$+ h\,[B_o\, R'(n,m) + B_1\, R'(n-1,m) + B_2\, R'(n-2,m)$$
$$+ B_3\, R'(n-3,m)].$$

avec $\quad E'(n,m) = \dfrac{-E(n,m)}{\tau} - A(n,m)\, E(n,m)$

et

$$R'(n,m) = \frac{-(R(n+m)+1)}{\tau} + A(n,m)\, E(n,m)$$

On voit ainsi que la prédiction de $E\ (n+1,m)$ comme celle de $R\ (n+1,m)$ nécessité la connaissance de $R\,(n,m)$ $E\,(n,m)$ et $A\,(n,m)$.

Passons à la correction

$$E(n+1,m) = a_o\, E(n,m) + a_1\, E(n-1,m) + a_2\, E(n-2,m)$$
$$+ h\,[b_{-1}\, E'(n+1,m) + b_o\, E'(n,m) + b_1\, E'(n-1,m)$$
$$+ b_2\, E'(n-2,m)]\ .$$

$$R\ (n+1,m) = a_o\, R(n,m) + a_1\, R(n-2,m) + a_2\, R(n-2,m)$$
$$+ h\,[b_{-1}\, R'(n+1,m) + b_o\, R'(n,m) + b_1\, R'(n-1,m)$$
$$+ b_2\, R'(n-2,m)]\ .$$

La correction de E (n+1,m) ainsi que celle de R (n+1,m) nécessite la connaissance de R (n+1,m) , E (n+1,m) et A (n+1,m).

La seule structure d'intégration possible de E et R est donc la suivante :

Prédiction de E (n+1,m) et R (n+1,m) puis correction de E (n+1,m) et R (n+1,m) E et R sont donc indissociable pas à pas.

Lorsque dans la suite du texte je parlerai de prédiction ou de correction de E elle sous entendra la prédiction ou la correction de R.

De même regardons l'interaction du groupement E, R avec l'intégration de A.

Cette intégration se fait à
On suppose comme précédemment le régime établi et on veut connaître A (m+1,n) quelque soit n alors que A (m-i,n), E (m-i,n) et R (m-i,n) sont connues quelque soit n et quelque soit i appartenant à (0,1,2,3).

Ecrivons l'algorithme de prédiction pour A (m+1,n)

$$A(n, m+1) = A_o\, A(n,m) + A_1\, A(n,m-1) + A_2\, A(n,m-2)$$
$$+ h\,[B_o\, A'(n,m) + B_1\, A'(n,m-1) + B_2\, A'(n,m-2)$$
$$+ B_3\, A'(n,m-3)\,].$$

Je rappelle $A'(n,m) = -\alpha E(n,m)$.

La prédiction de A (n+1,m) est donc possible sans contrainte particulière puisqu'elle ne nécessite quela connaissance de E (n-i,m) qui sontconnus par hypothèse.

Ecrivons l'algorithme de correction :

$$A(n,m+1) = a_o\ A(n,m) + a_1\ A(n,m-1) + a_2\ A(nm-2)$$
$$+ h\ [b_{-1}\ A'(n,m+1) + b_o\ A'(n,m) + b_1\ A(n,m-1)$$
$$+ b_2\ A'(n,m-2)].$$

Par contre en plus de la connaissance des E(n,m-i) A (n,m-i) R (n,m-i) la correction nécessité celle de E(n,m+1) et celle de R (n,m+1) quelque soit n.

Il est donc nécessaire de calculer E (n,m+1) et R (n, m+1) avant d'appliquer la correction sur A.

Il n'y a donc que deux configurations d'intégration possibles.

IIIF1 Prédiction A → prédiction E,R
puis correction A → correction E,R

IIIF2 Prédiction A → prédiction E,R
puis correction E,R → correction A

Les critères de choix entre ces deux confiturations sont des considérations de précision et éventuellement de stabilité. Je n'ai effectué aucun calculs dans cette direction en raison de leur complexité. J'ai choisi la structure IIIF1 par symétrie. Elle n'a pas posé de problème par la suite.

43 Spécificité du programme

Le calcul a été effectué sur un calculateur Hewlett Packard 9825.

Pour présenter les résultats on a pris sur une distance maximale de 3,24 mm huit courbes régulièrement espacées.

Pour chaque courbe, on calcule les paramètres caractéristiques des résultats expérimentaux c'est-à-dire la valeur et le temps d'arrivée à $\frac{3,24\ k}{8}$ de l'amplitude maximale du signal M (k étant le numéro de la courbe et varie de 0 à 8) le temps d'arrivée du point M/3, la largeur de la courbe à mi hauteur ainsi que la surface de la courbe. On a représenté ci-dessous dans le cas d'une gaussienne ces grandeurs caractéristiques.

La sortie des données s'est effectuée de plusieurs manières.

On a utilisé :
- le sous programme "VISU" qui permettait la visualisation de la courbe sur un tube cathodique

- le sous programme "draw" qui a permis le tracé de la courbe sur une imprimante graphique ainsi que l'impression des données numériques calculées.

- le sous programme "dsp" qui permettait l'affichage sur le calculateur des données numériques.

Puis des sous programmes de calculs

- le sous programme "int" qui calcule la surface de la courbe A sur une droite z égal constante l'algorithme utilisé est l'algorithme de la méthode de Simpson-simple.

- le sous programme "max" qui calcule respectivement la valeur et l'abscisse du maximum M de manière précise (en interpolant une parabole entre les points calculés et en en calculant le maximum), ainsi que l'abscisse du point à M/3 et la largeur à mi hauteur de la courbe.

Dans le programme principal on peut remarquer que les valeurs à z égale constante ont été stockées sous forme de vecteurs de dimensions N.

Le calcul des valeurs de A se fera donc à l'aide des ordres d'algèbre vectorielle du calculateur. Ce sont entre autre les ordres ara, smpy, qui font gagner un temps de calcul considérable.

Le programme détaillé est commenté en fig (9) et la liste des variables est donnée fig (10).

Les lignes 34 à 40 permettent uniquement le calcul de plusieurs conditions initiales l'une après l'autre sans intervention humaine.

Remarque :

Dans le programme définitif, présenté fig (9) il n'apparaît pas de calcul d'erreur en effet celui-ci a été mis pour les premiers calculs et après s'être assuré que le programme était correct (longueur du pas de calcul notamment) je l'ai supprimé pour gagner du temps de calcul.

- Le programme est présenté avec une condition initiale exponnentielle croissante décroissante.

44 Vérification du calcul machine

Le programme étant mis en machine il s'est posé le problème de la vérification des résultats machine. En effet la valeur de la majoration de l'erreur ne nous donne d'indications que sur la précision de chaque pas. Il fallait donc vérifier la stabilité et l'amplication du bruit d'arrondi. On a utilisé pour cela des comparaisons avec des solutions analytiques connues.

On a vu au chapitre II que peu de telles solutions sont connues. On en utilisera deux : le cas sans atténuation de la propagation soliton et le régime permanent (amplitude d'émission constante).

Les tests porteront :

- dans le cas soliton sur la valeur de la surface à la réception (elle doit rester constante) sur la vitesse de propagation de cette surface et sur la déformation du signal

par le calcul notamment la valeur de la "queue" du soliton doit rester nulle.

- dans le cas du régime permanent sur la valeur de l'atténuation.

Les calculs effectués sont présentés fig (13) dans le cas des solitons et fig (14) dans le cas du régime permanent.

Dans un cas comme dans l'autre les valeurs obtenues par calculs numériques sont voisines à moins de cinq pour cent de celles obtenues par le calcul analytique.

L'algorithme a donc été considéré comme correct et l'on a commencé l'étude de cas non analytique.

45 Calculs effectués

Il s'agissait de calculer pour les différentes formes de signal, les différentes surfaces et les différents temps de relaxation le signal reçu par le quartz récepteur.

Trois formes d'impulsion ont été utilisées : lagaussienne la cosécante hyperbolique et l'exponentielle croissante décroissante.

Seuls les résultats concernant la gaussienne et l'exponentielle croissante décroissante ont été exploités.

Toutes les valeurs calculées pour une impulsion gaussienne sont présentées en fig (11) et fig. (12) toutes les valeurs calculées pour une impulsion en exponentielle croissante décroissante.

Fig. 9 : Photocopie du listing du programme en langage H.P.L.

I - Dimensionnement des variables et tableaux. Définition des constantes.

II - Entrée de la condition initiale.

III - Appel du sous programme d'intégration III C_2 , III C_3.
P/Sous programme prédicteur
C/Sous programme correcteur

IV - Calcul de la surface de la courbe

V - Intégration par P_1C_1 pour le calcul de A, puis appel des sous programmes prédiction et correction

VI - Intégration par P_2C_2 pour le calcul de A , puis appel des sous programmes prédiction et correction

VII - Intégration par P_3C_3 pour le calcul de A , puis appel des sous programmes prédiction et correction

VIII - Intégration des points 4 à M par P_G et C_G avec appel des sous programmes prédiction et correction

IX - Permet le calcul continu de plusieurs conditions initiales et fin de programme

X - Algorithme de prédiction

XI - Algorithme de correction

XII - Visualisation sur un écran cathodique de la courbe

XIII - Algorithme d'intégration de A calcul de sa surface

XIV - Visualisations diverses des données

XV - Commande d'une imprimante graphique

XVI - Programme de calcul des diverses caractéristiques de l'impulsion : maximum, maximum sur trois, largeur.

```
0: 500→N;cfg ;sfg 14
1: dim A[N],B[N],E[N],R[N],F[N],G[N],H[N],I[N],X[N],Y[16],L[N],K[N],V[N]
2: 3e-8→L;4.5e10→r10;1e-4→S;.01→r1
3: L/24→K;55K→A;-59K→B;37K→C;-9K→D;9K→E;19K→F;-5K→H;4e-6→Y
4: r10K→r9;r10L→r12;23L/12→P;-16L/12→Q;5L/12→R
5: .5L→U;5L/12→V;8L/12→W
6: for I=1 to int(4e-6/L→X);6.566r1/Y→T;T(1-exp(-IL/Y))→A[I];next I
7: for I=X+1 to N;A[X]exp(-(I-X)L/Y)→A[I];next I
8: 'max'→r3;for I=1 to 8;36I→Y[I];next I;-1→R[1]
9: gsb "P"
10: gsb "C"
11: cll 'int'
12: 1→G;dsp G;ara A→B;ara H→I;ara G→H;ara F→G;ara E→F;gsb "visu"
13: 0→I;cll 'draw';r12→X;smpy XE→A;ara B-A→A;gsb "P"
14: r12*1.5→X;-.5r12→Y;smpy XF→A;smpy YE→X;ara A+X→A;ara B-A→A;gsb "C"
15: 2→G;dsp G;ara A→B;ara H→I;ara G→H;ara F→G;ara E→F
16: 1.5*r12→X;-.5*r12→Y;smpy XF→A;smpy YG→X;ara A+X→A;ara B-A→A
17: gsb "P"
18: r12*5/12→X;r12*8/12→Y;-r12/12→Z;smpy XE→A;smpy YF→X;ara X+A→A
19: smpy ZG→X;ara X+A→A;ara B-A→A;gsb "C"
20: 3→G;dsp G;ara A→B;ara H→I;ara G→H;ara F→G;ara E→F
21: 23*r12/12→X;-16*r12/12→Y;5*r12/12→Z;smpy XF→A;smpy YG→X
22: ara A+X→A;smpy ZH→X;ara A+X→A;ara B-A→A;gsb "P"
23: r9*9→X;r9*19→Y;r9*-5→Z;r9→T;smpy XE→A;smpy YF→X;ara A+X→A;smpy ZG→X
24: ara A+X→A;smpy TH→X;ara A+X→A;ara B-A→A;gsb "C"
25: r9→X;smpy XF→F;smpy XG→G;smpy XH→H
26: for G=4 to 288;dsp G;r9→X;ara A→B;ara H→I;ara G→H
27: ara F→G;smpy XE→F;smpy 55F→X;smpy -59G→A;ara X+A→A;smpy 37H→X;ara X+A→A
28: smpy -9I→X;ara X+A→A;ara B-A→A;gsb "P"
29: 9r9→X;smpy XE→X;smpy 19F→A;ara X+A→A;smpy -5G→X;ara X+A→A;ara A+H→A
30: ara B-A→A;gsb "C"
31: for I=1 to 16;if Y[I]≠G;jmp 2
32: cll 'int';cll 'draw';gsb "visu"
33: next I;next G;ina A,B,E,R,F,G,H,I,X,Y,L,K,V
34: if not flg1;.4→r1;8→r2;gto 3;sfg 1
35: if not flg2;.6→r1;16→r2;gto 3;sfg 2
36: if not flg3;.8→r1;24→r2;gto 3;sfg 3
37: if not flg4;1→r1;0→r2;sfg 0;gto 3;sfg 4
38: if not flg5;1.2→r1;8→r2;sfg 0;gto 3;sfg 5
39: if not flg6;8→r1;16→r2;sfg 0;gto 3;sfg 6
40: if not flg7;15→r1;24→r2;sfg 0;gto 3;sfg 7
41: end
42: "P":-1→R[2];A[2]-(L(A[1]→K[1])→E[2])/S→K[2];A[2]E[2]→L[2]
43: E[2]+1.5LK[2]-.5LK[1]→E[3];L(1.5L[2])-1→R[3]
44: -E[3]/S-A[3]R[3]→K[3];-(R[3]+1)/S+A[3]E[3]→L[3]
45: E[3]+PK[3]+QK[2]+RK[1]→E[4];R[3]+PL[3]+QL[2]→R[4]
46: for I=4 to N-1
47: E[I]+AC-E[I]/S-A[I]R[I]→K[I])+BK[I-1]+CK[I-2]+DK[I-3]→E[I+1]
48: R[I]+AC-(R[I]+1)/S+A[I]E[I]→L[I])+BL[I-1]+CL[I-2]+DL[I-3]→R[I+1]
49: next I;-E[N]/S-A[N]R[N]→K[N];-(R[N]+1)/S+A[N]R[N]→L[N];ret
50: "C":1.5L(A[1]→K[1])-UK[2]+E[2];R[1]-UL[2]→R[2]
51: -E[2]/S-A[2]R[2]→K[2];-(R[2]+1)/S+A[2]E[2]→L[2]
52: E[2]+VK[3]+WK[2]-L/12*K[1]→E[3];R[2]+VL[3]+WL[2]-L/12*L[1]→R[3]
53: for I=3 to N-1
54: E[I]+EK[I+1]+F(-E[I]/S-A[I]R[I]→K[I])+HK[I-1]+KK[I-2]→E[I+1]
55: R[I]+EL[I+1]+F(-(R[I]+1)/S+A[I]E[I]→L[I])+HL[I-1]+KL[I-2]→R[I+1]
56: next I;ret
57: "visu":ara A→V;if G<2;max(max(V[*]),abs(min(V[*])))/2047→Q
58: wtb 5,6;eir 5,33;for J=1 to N;wtb 5,2047+V[J]/Q;next J;eir 5,0;ret
59: "int":0→T;for J=1 to 497 by 2;T+L/3*(A[J]+4A[J+1]+A[J+2])→T;next J
60: beep;dsp T;ret
61: "dsp":dsp A,B,C,D,E,F,H,K,L,P,Q,R,U,V,W;ret
62: "draw":dsp "draw";ara A→V;fxd 1;if I;gto 68
63: wrt 705,"ip80,200,7280,11000;scmm,3;iw-1000,-5,4000,210;oa";red 705,r0
64: fmt z,f;wrt 705,"ya",r0,",10,0,180,5;xa0,-10,",",r0+.2N,",",r0,";"
65: fmt z,f;wrt 705,";ya",r0+.2N,",10,0,180,5;xa180,10,",",r0,",",r0+.2N
66: fmt ;wrt 705,";grpu4,0,-2"
67: wtb 706,27,40,65;wrt 705,"st"
68: fmt z,f;wrt 705,"papu",r0,",-2;grpd.2"
69: fmt z,",",f;for J=1 to N;wrt 705,100V[J]/r3+50;next J
70: fmt ;wrt 705,";pu"
71: fmt 2f5.0,f5.2,e12.5,f7.4,3f7.3
72: wrt 706,I+r2,G,r1,T,'max'/r3,(L*1e6→X)M,r4X,r5X
73: fmt ;fxd 0;ret
74: "max":for J=1 to N;if A[J]>p14;A[J]→p14;J→p9
75: next J;10→p10;if p9-p10<1;p10+1→p9
76: if p9+p10>N;N-p10→p9
77: for J=p9-p10 to p9+p10;p1+J→p1;p2+JJ→p2;p3+JJJ→p3;p4+J↑4→p4
78: p5+A[J]-p14→p5;p6+J(A[J]-p14)→p6;p7+JJ(A[J]-p14)→p7;next J
79: (2p10+1→p10)(p2p4-p3p3)+2p1p2p3-p2↑3-p1p1p4→p8
80: (p5(p2p4-p3p3)+p6(p2p3-p1p4)+p7(p1p3-p2p2))/p8→p11
81: (p10(p4p6-p3p7)-p1p4p5+p2(p1p7+p3p5-p2p6))/p8→p12
82: (p10(p2p7-p3p6)+p1(p2p6+p3p5-p1p7)-p2p2p5)/p8→p13
83: p11+p14-p12p12/4p13→p11;-p12/2p13→M;if (prnd(M,0)→J)>N;N→J
84: if J=0;1→J
85: if J>1;if A[J-1→J]>p11/3;jmp 0
86: J+(p11/3-A[J])/(A[J+1]-A[J])→r4;prnd(M,0)→J;if r4<0;0→r4
87: if J=0;1→J
88: if J>1;if A[J-1→J]>p11/2;jmp 0
89: J+(p11/2-A[J])/(A[J+1]-A[J])→p12;if J<1;0→r5;ret p11
90: prnd(M,0)→J
91: if J<N;if A[J+1→J]>p11/2;jmp 0
92: J-p12+(p11/2-A[J-1])/(A[J]-A[J-1])→r5;if J=N;0→r5
93: ret p11
```

Fig 10 TABLEAU DES VARIABLES

A : coefficient du prédicteur d'ADAMS BASHFORTH pour le calcul de A.

B : idem

C : idem

D : idem

E : coefficient du correcteur d'ADAMS BASHFORTH pour le calcul de A.

F : idem

H : idem

G : indice d'intégration (N° de la droite z : cste)

I : indice multiple de boucle

J : indice multiple de boucle

K : pas de calcul diviser par 24

M : variable utilisé dans les sous programmes "draw" et max ne présente pas d'intérêt

N : nombre de point sur une droite z = cste

O : variable du sous programme visu

P : coefficient de prédiction pour le calcul de E et R

Q : idem

R : idem

S : idem

T : variable multiple sert notamment à calculer la surface de la courbe

U : coefficient de correction pour le calcul de E et R

V : idem

W : idem

X : variable multiple notamment coefficient de prédiction dans l'intégration de A.

Y : idem

Z : idem

tableau des vecteur de dimension N

Permet le stockage de toutes les informations A,E,R sur une droite z = cste on a ainsi les vecteurs

A : valeur de A au point courant
E : valeur de E au point courant
R : valeur de R au point courant

Les autres tableaux sont à usage multiple soit : B,F,G,H,I,K,L, V,X,Y.

Variables r

Ce sont des coefficients de calculs définit dans les premieres lignes du programme : les expliciter n'apporterait rien de plus on peut seulement signaler r10 valeur du coefficient de couplage dans IIC1.

Fig. 11) Courbes calculées : Cas de la gaussienne

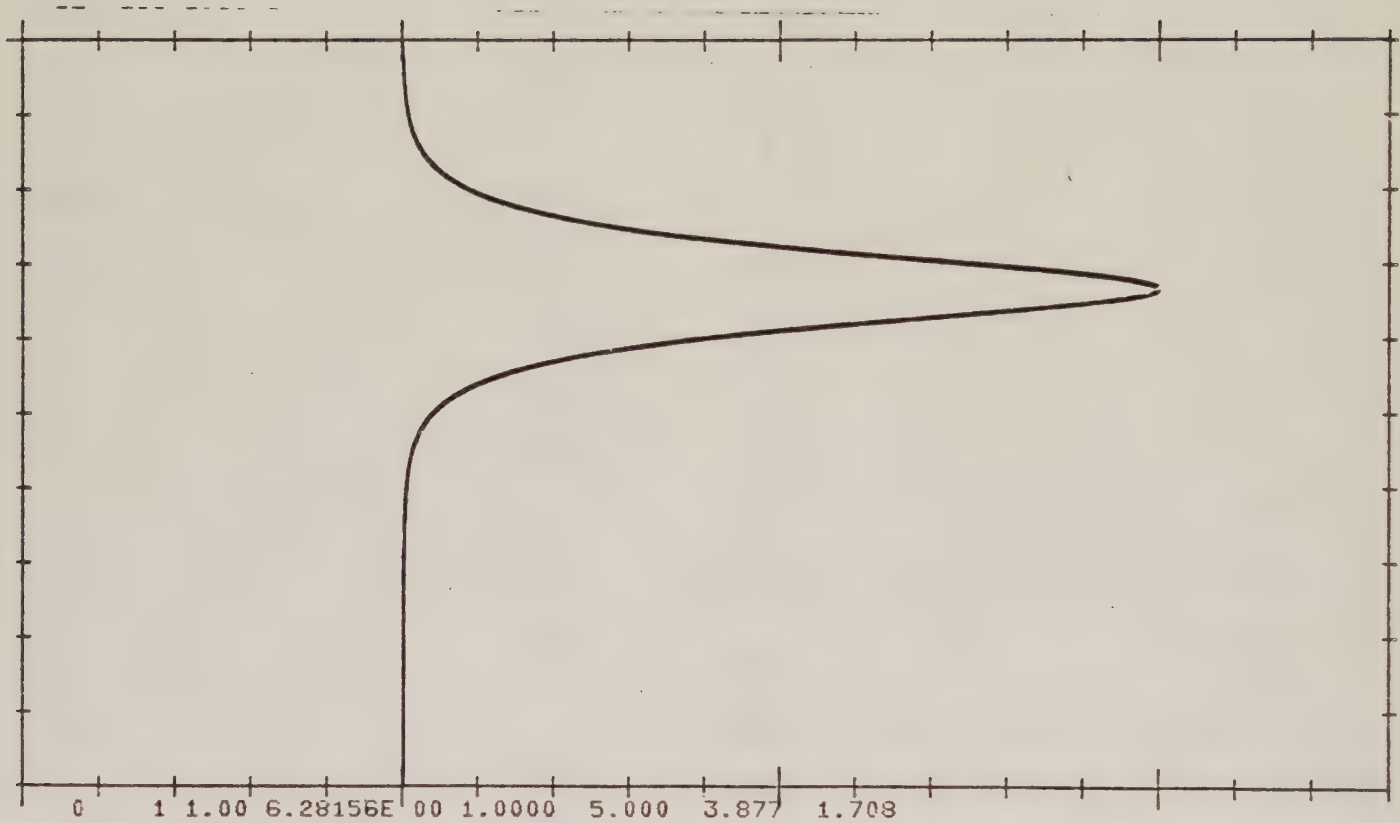
α	τ	$S/2\pi$	α	τ	$S/2\pi$
$1,510^{10}$	30 µs	1	$1,510^{10}$	10 µs	1,8
$1,510^{10}$	30 µs	1/10	"	"	2
$1,510^{10}$	30 µs	1/100	"	"	0,2
$1,510^{10}$	3 µs	1/100	"	"	0,4
$1,510^{10}$	300 µs	1/100	"	"	0,6
$1,510^{11}$	3 µs	1/100	"	"	0,8
$1,510^{11}$	3 µs	1/10	"	"	1,2
$1,510^{11}$	3 µs	0,2	"	"	1,4
$1,510^{11}$	3 µs	0,4	"	"	1,6
$1,510^{11}$	3 µs	0,6	"	"	1,0
"	"	0,8	"	"	1,8
"	"	1,2	"	"	2,0
"	"	1,4			
"	"	1,6			
"	"	1,8			
"	"	2			
"	"	2,2			
"	"	2,4			
$1,510^{10}$	10 µs	0,8			
"	"	1,2			
"	"	1,4			
"	"	1,6			

Fig. 12 Courbes calculées - Cas de l'exponentielle

α	τ	$S/2\pi$
$1,5\,10^{10}$	30 µs	1/100
"	"	0,1
"	"	0,2
"	"	0,4
"	"	0,5
"	"	0,55
"	"	0,6
"	"	0,65
"	"	0,70
"	"	0,75
"	"	0,8
"	"	0,9
"	"	1,0
"	"	1,1
"	"	1,2
"	"	1,3
$4,5\,10^{10}$	30 µs	1/100
"	"	0,1
"	"	0,2
"	"	0,4
"	"	0,5
"	"	0,55
"	"	0,6
"	"	0,65
"	"	0,70
"	"	0,75
"	"	0,8
"	"	0,9
"	"	1,0
"	"	1,1
"	"	1,2
"	"	1,3
"	"	1,4
"	"	1,6
"	"	1,8
"	"	2,0
"	"	2,2
"	"	2,4
"	"	2,7
"	"	3,0
$4,5\,10^{10}$	10 µs	0,01
"	"	0,1
"	"	0,2
"	"	0,4
"	"	0,6
"	"	0,5
"	"	0,55
"	"	0,65
"	"	0,70
"	"	0,75
"	"	0,8
"	"	0,9

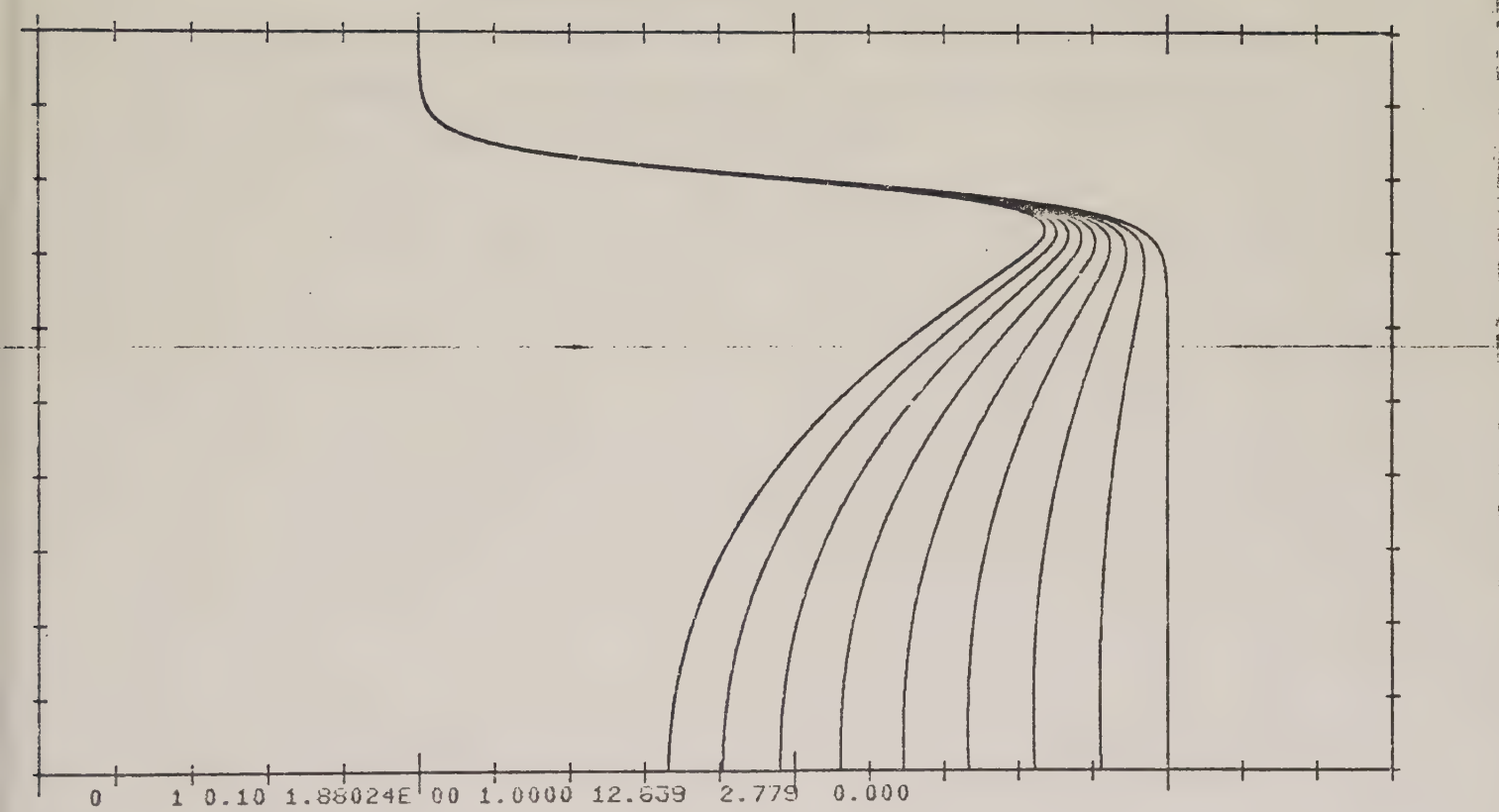
α	τ	$S/2\pi$
$4,5 10^{10}$	10 µs	1,0
"	"	1,1
"	"	1,2
"	"	1,3
"	"	1,4
"	"	1,6
"	"	1,8
"	"	2,0
"	"	2,2
"	"	2,4
"	"	2,7
"	"	3,0
$1,5 10^{11}$	10 µs	0,5
"	"	0,55
"	"	0,65
"	"	0,7
"	"	0,75
"	"	0,9
"	"	1,1
"	"	1,3
"	"	1,4
"	"	1,6
"	"	1,8
"	"	2,0
"	"	2,20
"	"	2,40
"	"	2,70
"	"	3,00

α	τ	$S/2\pi$
$4,5 10^{10}$	100 µs	0,01
"	"	0,4
"	"	0,6
"	"	0,8
"	"	1,0
"	"	1,2
"	"	8,0
"	"	15,0



0	1	1.00	6.28156E	00	1.0000	5.000	3.877	1.708
1	36	1.00	6.28025E	00	0.9996	5.006	3.883	1.708
2	72	1.00	6.27908E	00	0.9996	5.013	3.890	1.708
3	108	1.00	6.27804E	00	0.9992	5.019	3.896	1.708
4	144	1.00	6.27711E	00	0.9990	5.026	3.902	1.708
5	180	1.00	6.27630E	00	0.9989	5.032	3.909	1.708
6	216	1.00	6.27559E	00	0.9988	5.038	3.915	1.708
7	252	1.00	6.27498E	00	0.9985	5.044	3.921	1.708
8	288	1.00	6.27446E	00	0.9982	5.050	3.927	1.709

Fig. 13 : Propagation d'un soliton 2π : on peut remarquer sa vitesse constante et sa stabilité pendant les 3,24 mm de l'expérience.



1	36	0.10	1.75871E 00	0.9691	4.739	2.767	0.000
2	72	0.10	1.63988E 00	0.9449	4.515	2.758	0.000
3	108	0.10	1.52420E 00	0.9235	4.383	2.750	0.000
4	144	0.10	1.41205E 00	0.9038	4.291	2.743	0.000
5	180	0.10	1.30377E 00	0.8854	4.219	2.737	0.000
6	216	0.10	1.19982E 00	0.8681	4.161	2.730	0.000
7	252	0.10	1.09981E 00	0.8519	4.110	2.724	9.365
			[illegible]	0.8362	4.068	2.719	7.280

Fig. 14 : Atténuation en régime sinusoïdal petits signaux
Le régime permanent étant supposé atteint après 15 µs.

III5 - Références de l'annexe III

1. CORNELL UNIVERSITE ITHACA NEW YORK
2. RALSTON & WILF Mathematical methods for digital computers volume 1 WILEY edit.
3. W E MILNE Numérical calculus Princeton University Press 1949
4. HAMMINGS Numerical methods for scientists and engineers. Mac Graw Hill
5. J C WHEATLEY Experimental properties of ^3He Reviews of Modern Physics, 47 (1975) 415

6 J A SAULS Soliton propagation of zero sound in ^3He Physical Review Letters, 47 (1981) 530

ANNEXE IV

Cette annexe présente la copie de l'article soumis à la Review of Scientific Instrument (à paraître septembre 82) et concernant l'interfaçage entre les 2 calculateurs HP-9825 et CBM 8032.

Conversational interfacing between a HP 9825 and a CBM 8032 (PET) via an IEEE-488 bus

M. Rouff and C. Vibet

Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique, Département de Robotique, 61, Av. Président Wilson, 94.230 Cachan, France

E. Varoquaux

Laboratoire de Physique des Solides, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay, France

(Received 16 June 1981; accepted for publication 8 May 1982)

The interconnection of two data-acquisition systems controlled, respectively, by a Hewlett–Packard HP 9825 and a Commodore CBM 8032, via an IEEE-488 (GPIB) bus is described. The interface, whose schematics are given, solves the problems of compatibility between the two computers.

PACS numbers: 06.50.Mk, 89.80. + h

This article deals with the connection, via an IEEE-488 (GPIB) bus, of a Commodore CBM 8032 of the PET series to a main data-acquisition system built around a Hewlett–Packard HP 9825 desk computer. In our specific setup, the CBM 8032 is used to control an automated mutual inductance bridge and the HP 9825 monitors a high-frequency acoustic spectrometer in which high-speed data acquisition is critical. In order to avoid interferences between the two measurements and to process simultaneously the collected information, we want to link the two systems to exchange data and instructions. For reasons of compatibility, we require that this bidirectional conversational coupling takes place via an IEEE-488 bus. However, a CBM 8032 cannot, in its commercial configuration, be connected straightforwardly to a HP computer. The specifications of the HPIB bus, which is Hewlett–Packard's implementation of the IEEE-488 standards, are not compatible with those of the IEEE port (J_1 port) of the CBM[1]:

(1) The timing of the addressing information is different on the two controllers. The HP 9825 *begins* any addressing sequence by *unlistening* all previous listeners on the bus as the CBM sends the unlisten message immediately *after* the transfer of data is completed.

(2) The CBM can *only* be *controller* on its IEEE-488 bus, i.e., the lines Remote Enable (REN) and Interface Clear (IFC) are preset, and information on the Service Request (SRQ) line is ignored.

We thus have designed and built an interface which performs the following functions:

(1) It behaves as a peripheral for both controllers and is addressed as such. The CBM is connected to the interface by thirteen lines from port J_1, the regular IEEE port, and nine lines from port J_2 which are used to supplement the missing IEEE functions. The Non-Maskable Interrupt (NMI) is wired directly to the microprocessor bus. On the HP bus, the interface conforms to the HP protocol.

(2) Its status is fixed by the following statements. It is either active or idle (inactive). If active, the address of either Bus I (on which the CBM is controller only) or Bus II (which is connected to the HP9825) must be specified. For a given bus address, data and instructions may be either input (CBM listener) or output (CBM talker).

(3) In the actual version which we have built, the interface also acts as a multipurpose interface for the CBM 8032 with the capability of addressing six other separate buses.[2]

We now briefly discuss the schematics of the interface, shown in Fig. 1, and its operation. We distinguish three main blocks. The *Multiplexing* block, built around MC 4051 eight-way multiplexers, is equipped on the GPIB bus lines of bidirectional, three-state high output current MC 3448 drivers. Note that this is necessary also on the CBM J_1 port if its output buffers (MC 3446) are not internally bypassed. The *Interface Status* block drives the Send/Receive pins of the addressed 3448 buffers in the appropriate Input/Output state. The line CB 2 of the J_2 port is used to specify the Send/Receive function. The crux of the interface is the HPIB *Protocol Handler* whose function is to watch the bus connected to the HP 9825 and signal when the interface address shows up. The address word appears on the five least significant data lines, which are connected to comparators. The next two lines carry the Talker/Listener order. When the interface is addressed by the HP 9825, and when it is in the idle state, the NMI line is set to zero and the CBM processor is sent to an interrupt subroutine which instructs the CBM to take over as an IEEE-488 talker or listener on Bus II after the addressing formalities are completed (i.e., when the ATN line is turned high). During the time it takes for the CBM to respond, the NRFD and NDAC lines are handled directly by the HPIB protocol handler. Also, the Talker/Listener information is stored temporarily in the interface until the CBM is ready to take

 0034-6748/82/091479-02$01.30 © 1982 American Institute of Physics

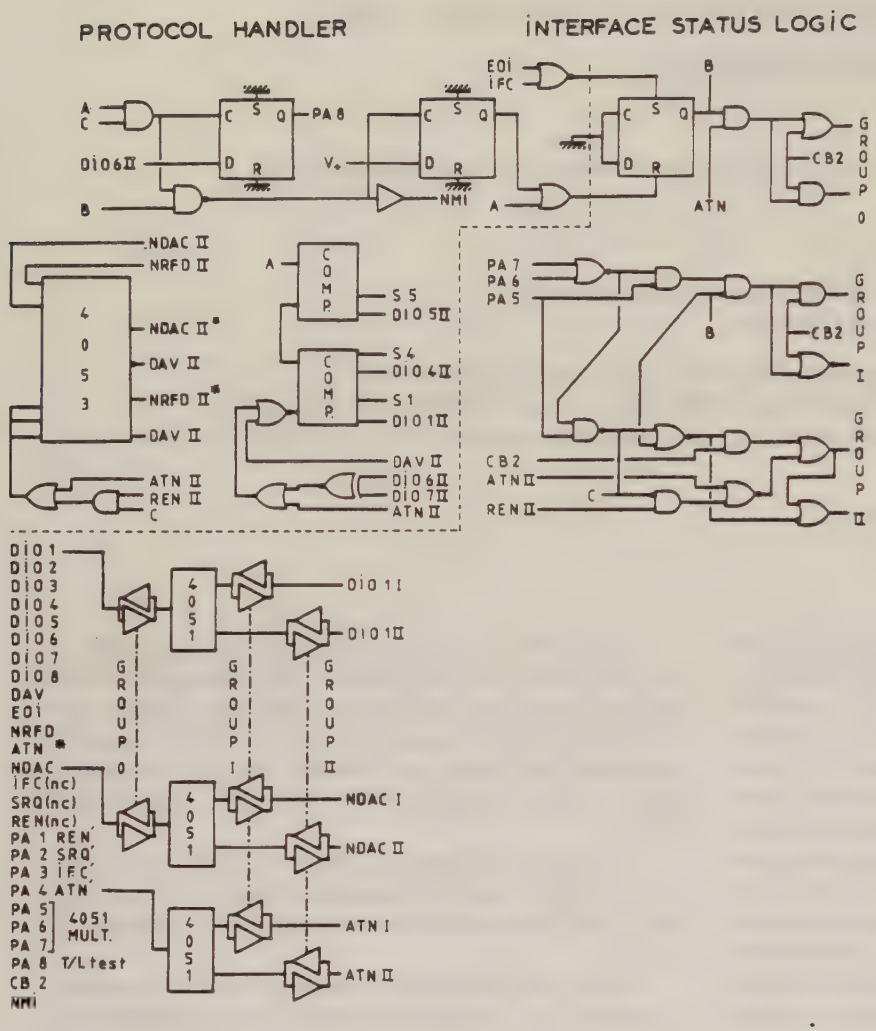


FIG. 1. Simplified circuit diagram showing the various logical blocks of the interface, the HPIB Protocol handler, the Interface stratus logic, and the multiplexer at the bottom. The dash dot lines stand for groups of bidirectional MC 3448 buffers which are not all represented. Groupe O is connected to the CBM, the line labels refer to the manufacturer's labeling. Groups I and II are connected to two GPIB buses, Bus II being common with the HP 9825. The Send/Receive functions of each group are selected by two lines, driven by the Interface status logic. These lines are complementary when the interface is active; the bottom line of each group drives the NRFD and NDAC lines, the top line, the EOI, DAV, and DATA lines. A is the comparator output of the address word recognizer (COMP). S_1 to S_5 are connected to the switches which code the interface address. B is low when the interface is active, high when idle. C is an internal validation of the MC 4051's address. The lines PA 5, PA 6, PA 7 of the CBM J_2 port carry the 4051's binary control input information. The MC 4053 is used to give control of the lines NDAC II and NRFD II either to the CBM processor (*) or to the Protocol handler, as specified in the text. ATN* is the J_1 port ATN line and only validates the addressing of the interface by the CBM, ATN' (line PA 4 from the J_2 port) is monitored by the CBM processor and is the true ATN line on Buses I and II. Figure 1 is to be taken as giving the broad architecture of the interface and does not accurately reflect the actual wiring.

over. The interrupt subroutine and the other subroutines used for the full implementation of the IEEE-488 standards use 850 bytes and are permanently stored in a user defined PROM of the CBM.[3]

The specifications of the complete system may be summarized as follows. The time taken to address the CBM from the HP 9825, transfer one 8-bit data word, and end the handshake is 1.7 ms. It takes 0.2 ms more for each added data word. Specialized microprograms can be stored in the CBM memory, called from the HP 9825 by user-defined mnemonics and executed immediately by the CBM. Results are then available upon request from the HP 9825. This delegated job assignment can be monitored by the CBM in a symmetric way. Thus, the interface that we have described makes possible the interconnection of a CBM microcomputer to a HP desk calculator with a high level of conversationality, thus setting up a powerful and fast multitask system.

We would like to thank Professor Sol for his constant interest and support and M. Morel, from Institut de Physique Nucléaire (Orsay) for several informative discussions. This is supported in part by DRET contract n° 79/567.

[1] E. Fischer, C. W. Jensen, *PET and the IEEE-488 bus (GPIB)* (Osborn/McGraw-Hill, Berkeley, California, 1980).
[2] Such an interface has already been described by T. M. Jedju, Rev. Sci. Instrum. **50**, 1077 (1979).
[3] The machine language program is available from the authors.

ANNEXE V

Présentation des programmes assembleurs écrit et implanté en mémoire morte dans le CBM commodore.

Ces programmes sont étroitement liés les uns aux autres mais je garderais la présentation établie au chapitre IV c'est-à-dire

a) Conversationnelle IEEE bidirectionnelle selon les normes Hewlett Packard

b) Gestion des ordres donnés par le calculateur HP 9825

c) Gestion de l'asservissement du pont

d) Gestion de la mesure de température du thermomètre à platine

e) Gestion de l'interface

f) Gestion interne (temps, édition écran etc...)

comme je l'ais énoncé au chapitre V ces programmes sont en langage machine il est donc nécessaire de présenter une partie de la topologie du PET avant de les présenter.

On pourra pour plus de détail consulter les références (3) et (4) du chapitre V.

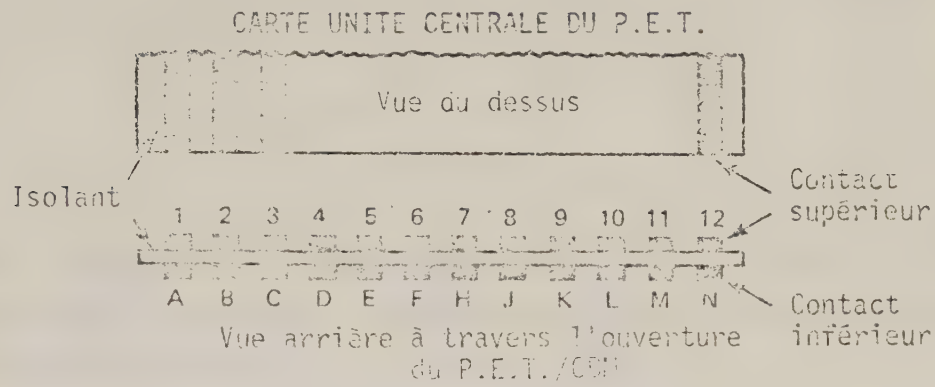
A) Structure du CBM

Tous ce sprogrammes sont accès sur les ordres d'entrée sortie des divers ports de la machine. Je présenterais donc brièvement le principe de commande d'une entrée sortie, les adresses correspondant de ces ports et la carte de mémoire du PET.

A1) Principe de commande d'une entrée sortie sur le C.B.M.

Les deux ports utilisés sont désignés commercialement par port utilisateur (J2) et port IEE (J1)

a) Port utilisateur structure



Les pattes de C jusqu'à L peuvent être commandés en entrée ou en sortie indépendamment .

La commande en entrée ou en sortie s'effectue par le stockage du code approprié à l'adresse mémoire 59459.

1 pour une entrée 0 pour une sortie la place du digit dans le mot fixe la patte de sortie à laquelle on s'adresse de C à J.

La lecture ou l'écriture des données se fait à l'adresse 59457.

CA1 (B)
Permet de détecter une transition logique (je ne l'ais pas utilisé pour la gestion du processus). Sa commande est complexe son initialisation nécessité la mise à zéro du bit 0, de l'adresse 59468 et la lecture de la mémoire d'adresse 59457 toute transition met à 1 le bit 6 de l'adresse 59459.

ADDRESSING THE GPIB FROM PET I/O MEMORY

All data transfers, whether initiated by PET BASIC statements, assembly language instructions or other means, are propagated to the GPIB data lines by placing the data into a dedicated location in the PET memory space. Other dedicated I/O locations provide access to all of the control lines except REN, which is held permanently low by the PET, and IFC, which is asserted by the PET's reset hardware. The I/O memory locations assigned to the GPIB lines are listed in Table 2-3.

Table 2-3. PET hardware addresses for GPIB lines

GPIB Line		PET Memory Address		
Name	Mode	Hexadecimal	Decimal	Bit(s)
DIO1-8	Input	E820	59424	0-7
DIO1-8	Output	E822	59426	0-7
DAV	Output	E823	59427	3
DAV	Input	E840	59456	7
NRFD	Output	E840	59456	1
NRFD	Input	E840	59456	6
NDAC	Output	E821	59425	3
NDAC	Input	E840	59456	0
ATN	Output	E840	59456	2
ATN	Input	E821	59425	7
SRQ	Input	E823	59427	7
EOI	Output	E811	59409	3
EOI	Input	E810	59408	6

DATA LINES

The PET is normally programmed to send data to, or receive data from, the GPIB data lines DIO1-8 using INPUT, PRINT and other I/O statements as described in Chapter 4. However, you can use PEEK and POKE commands into I/O memory to access individual lines on the GPIB, as described here.

These data lines can be addressed and exercised by the simple programs outlined below. While exercising the data lines in these procedures, remember that to actually transfer data a remote, standard, bus-compatible device would have to be on the bus, and IEEE Std 488 handshake protocol would have to be observed.

Fig: 1

CB2 (M)
Peut se commander indifféremment en entrée ou en sortie. Je ne décrirais que la configuration de sortie (c'est celle utilisé dans les programmes). Donc CB2 est au niveau logique 1 pour la configuration 111 des bits 765 de l'adresse 59468.

CB2 est au niveau logique 0 pourla configuration 110 des bits 765 de la même adresse.

b) Port IEEE

La commande en est plus aisée et figure dans tous les ouvrages. Il suffit suivant que l'on travaille en entrée ou en sortie, d'envoyer ou delire les données aux adresses figure 1.

A2 Adresses des ports IEEE

soit la figure 1

A3 Cartographie des mémoires du CBM

soit la référence 3 du chapitre 5.
puis celle créé en mémoire vive fig 2 .

B) Description des programmes

a) Conversationnelle IEEE

Il se compose des programmes recep data, trans data, recep gene, trans gene, adres data.

* Trans data

C'est le sous programme d'émission d'un mot de 8 bits chaque configuration du conversationnel est temporiser l'organigramme ainsi que le programme assembleur est donné fig (3).

FIGURE 2 :(feuille 1)

MEMORY MAP

11 776 à 11 805 buffer temps temperature (squid)
11 806 à 11 835 buffer temps temperature (platine)
11 836 à 11 900 buffer de transmission de données
11 836 à nb de mots a transmettre
11 901 à 11 965 buffer de réception de données
11 966 à 12 045 buffer clavier et disquette
12 050 adresse du périphérique IEEE en conversationnel
12 051 nombre de mots à transmettre
12 052 nombre de caractère à recevoir
12 053 premier mot d'adressage
12 054 deuxième mot d'adressage
12 055 troisième mot d'adressage
12 056 mot test 0 OSRQ 1SRQ 1 dépassement

3 Terminaison de recep gene 0 nb de caractères
1 valide E OI CRLF
4 détermine la forme de l'adressage 0 type HP 9825
1 type CBM
5 test de transmission de température 1 platine
0 squid
6 test de transmission 1 infini
0 limité

12 057 à 1 059 information horloge 12 057 mot de plus fort poid
12 050 à 12 051 jour en ASC II
1 à 2 adresse de transmission et de réception des données
adressage indirect
12 062 - 1 063 adresse de la prochaine donnée du platine
12 065 adresse de la page d'arrêt
12 066 mot test
3 mode d'adressage 0 adressage extérieur
1 adressage intérieur
4 terminaison de trans gene 0 EOI CRLF
1 sans terminaison
5 test de mission de donnée 0 thermomètre
1 quelconque

FIGURE 2 :(feuille 2& fin)

6 gestion d'ordre manuel 1 par HP 9825
0 par le PET

12 067 nombre de mots pour les actionsrecep et trans gene
12 068 à 12 073 accumulateur tampon
12 076 partie basse des données du thermomètre à platine
12 077 partie haute des données du thermomètre à platine
12 079 à 12 080 temporisation dans la gestion IEEE
12 080 à 12 081 adresse de la prochaine donne de squid
12 082 à 12 083 adresse de saut indirecte
12 084 nombre de données à transmettre sur l'écran.

* Recep data :

C'est le sous programme symétrique du précédent pour la réception d'une donnée même remarque ci-dessus pour les temporisation L'organigramme ainsi que le programme assembleur est donné fig.4

Remarque : Ces 2 programmes ont des tests de sortie dans le cas d'absence d'un peripherique.

* Adress data :

Permet d'envoyer au choix les cycles d'adressage suivant : - adressage type HP 9825
- adressage type CBM

par le choix du bit 4 de l'adresse 12056 et cela soit pour le bus interne à l'interface soit sur le bus général par le choix du bit 3 de l'adresse 12066.

Le programme ainsi que son organigramme est donné fig 5 on peut remarquer que l'on utilise le sous programme trans data.

* recep gene :

Permet la gestion de la réception des données par l'appelle du sous programme Recep data.

Le mode de terminaison du conversationnel est choisit par le bit 3 de l'adresse 12056 enfin le choix de l'adresse à laquelle doit être placé les données est mis en 01 et 02.

La fig. 6 donne l'organigramme et le programme assembleur.

* Trans gene :

Programme symétrique du précédent en transmission.

Le bit 4 de l'adresse 12066 permet de choisir la terminaison du message le nombre de mots à transmettre est placer en 12051.

L'organigramme ainsi que les programmes assembleurs est donné en figure 7.

b) Gestion des ordres donnés par le calculateur HP 9825

Elle se décompose en trois parties :
- gestion de l'interruption
- exécution des ordres
- réinitialisation de l'interface et du calculateur.

En fait les travaux cités en premier est en dernier sont regroupés en un seul programme l'exécution des ordres étant appellé en sous programme, il me reste donc à présenter les programmes ci norme Gestion NMI et 9825 Execut.

* Gestion NMI

Ce programme est complexe :

il sauvegarde les registresdes opérations précédemment en cours, prépositionne les ports de sorite pour commencer un conversationnel, teste si l'adressage est de type "talker" ou "listener", teste la fin de l'adressage automatique puis suivant la configuration demande exécute les séquences pré-programmé et réinitialise l'interface et les registres du micro-processeur. L'organigramme est donné fig 8.

* 9825 execut

Ce sous programme est appelé par le programme gestion NMI dans le cas d'un ordre venant du calculateur HP 9825 cet ordre est codé sur 3 caractères. Le sous programme compose l'ordre demandé au catalogue existant en mémoire et en assure l'exécution. Le programme est présenté fig 9.

c) Gestion de l'asservissement

Soit un voltmètre et un transformateur de rapport variable commandable par bus IEEE 488.

J'utilise pour cela tous les sous programmes présentés en a). Il me fallait faire l'inventaire de toutes les informations transmissibles par l'IEEE et créer à chaque fois un programme en langage machine. Ce qui tout en faisant gagné du temps dans le transfert de l'information en simplifie la commande soit les programmes EPI, ESD, AE, AD, volt, V.A. qui permettent respectivement l'invesrsion de phase, l'annulation de la tension de sortie, la mise en place ou la suppression de toutes les fonctions du transformateur et la lecture et la commande du voltmètre.

Les programmes sont donnés fig 10.

d) Gestion et acquisition de la température du thermomètre à platine.

C'est un programme élémentaire qui consiste à sélecter le bus platine sur l'interface et le lire. Le programme est donné fig 11.

e) Gestion de l'interface

Se compose de 2 programmes : OPEN ET CLOSE

* OPEN

Il s'agit d'ouvrir et d'initialiser l'interface afin de permettre le transfert de données.Le programme ainsi que son organigramme est donné fig 12.

* CLOSE

Fonction symétrique du programme précédent reconfigure l'interface en position repos.

Le programme est donné fig 13.

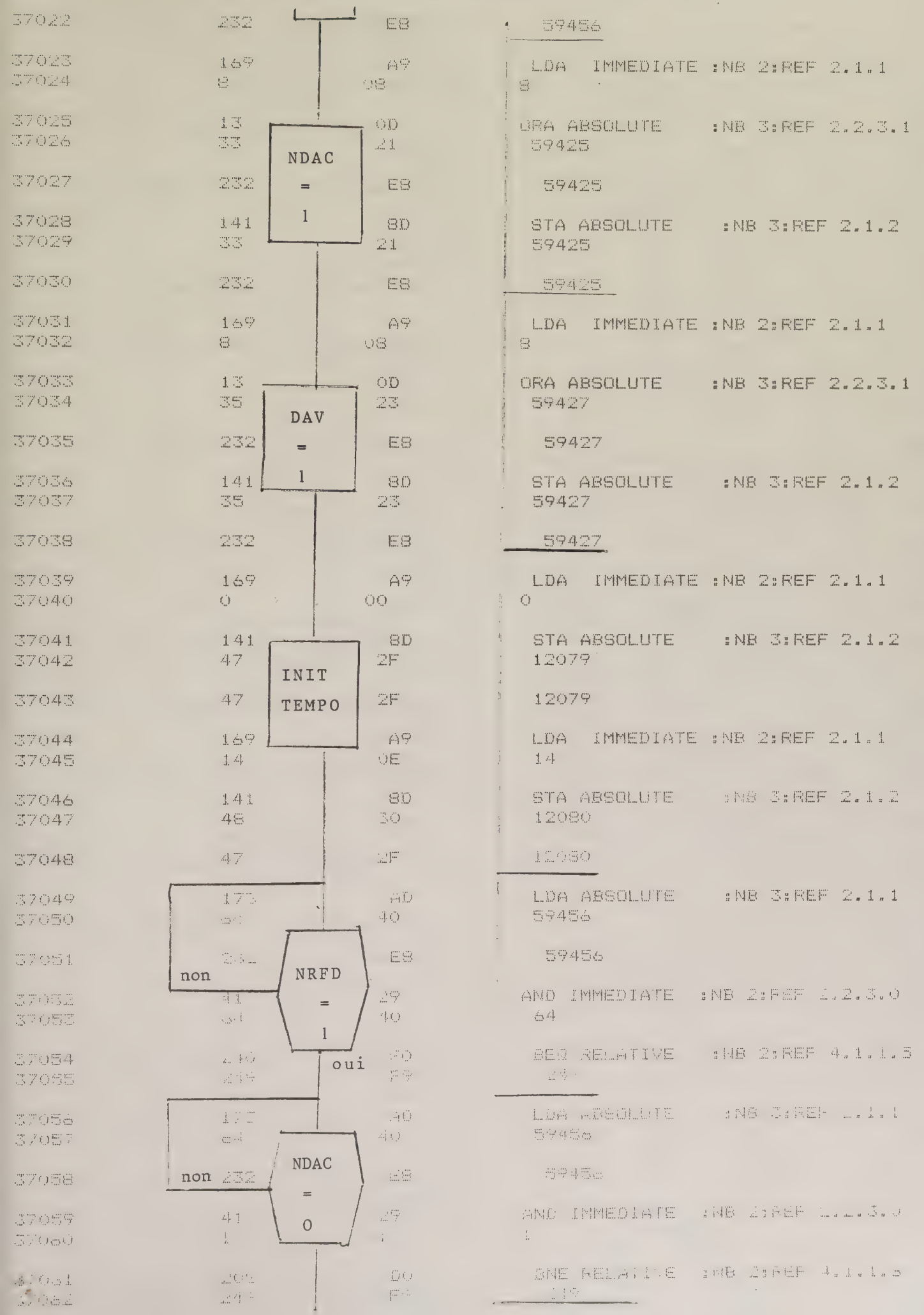
Les programmes présentés ne constituent que l'ossature desprogrammes écrits pour transformer le CBM en thermomètre les problèmes tels que l'édition écran la lecture du temps, l'initialisation desdiverses phases etc.. n'ont pas été présentés dans cette thèse pour ne pas en alourdir le contenu, mais leur importance en volume et de l'ordre de grandeurs des programmes présentés.

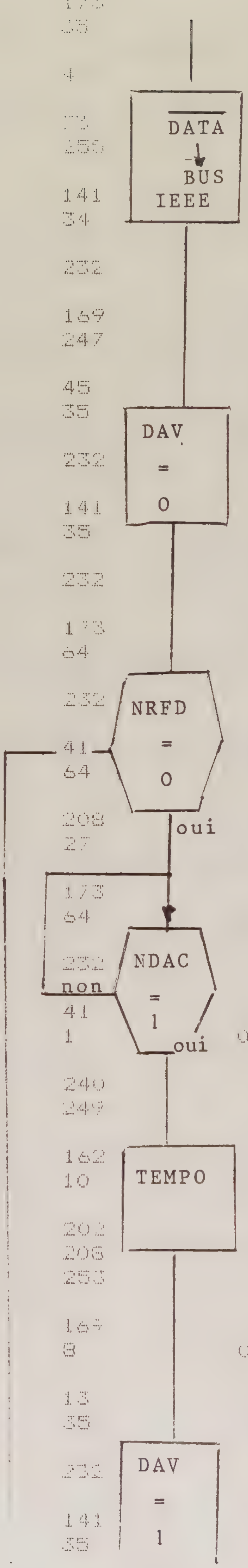
Fig. 3 : Programme TRANS DATA

(feuille n°1)

37015	169		A9	LDA IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37016	2		02	2
37017	13		0D	ORA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.2.3.1
37018	64		40	59456
37019	232	NRFD	E8	59456
37020	141	=	8D	STA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.1.2
37021	64	L	40	59456

Fig. 3 : Programme TRANS DATA (feuille 2)





37063	173	AD	LDA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.1.1
37064	35	23	12067
37065	47	2F	12067
37066	73	49	EOR IMMEDIATE :NB 2:REF 2.2.3.2
37067	255	FF	255
37068	141	8D	STA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.1.2
37069	34	22	59426
37070	232	E8	59426
37071	169	A9	LDA IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37072	247	F7	247
37073	45	2D	AND ABSOLUTE :NB 3:REF 2.2.3.0
37074	35	23	59427
37075	232	E8	59427
37076	141	8D	STA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.1.2
37077	35	23	59427
37078	232	E8	59427
37079	173	AD	LDA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.1.1
37080	64	40	59456
37081	232	E8	59456
37082	41	29	AND IMMEDIATE :NB 2:REF 2.2.3.0
37083	64	40	64
37084	208	D0	BNE RELATIVE :NB 2:REF 4.1.1.6
37085	27	1B	27
37086	173	AD	LDA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.1.1
37087	64	40	59456
37088	232	E8	59456
37089	41	29	AND IMMEDIATE :NB 2:REF 2.2.3.0
37090	1	01	1
37091	240	F0	BEQ RELATIVE :NB 2:REF 4.1.1.5
37092	249	F9	249
37093	162	A2	LDX IMMEDIATE :NB 2:REF 7.0
37094	10	0A	10
37095	202	CA	DEX IMPLIED :NB 1:REF 7.6
37096	208	D0	BNE RELATIVE :NB 2:REF 4.1.1.6
37097	253	FD	253
37098	169	A9	LDA IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37099	8	08	8
37100	13	0D	ORA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.2.3.1
37101	35	23	59427
37102	232	E8	59427
37103	141	8D	STA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.1.2
37104	35	23	59427

Fig. 3 Programme TRANS DATA (feuille 4 et fin)

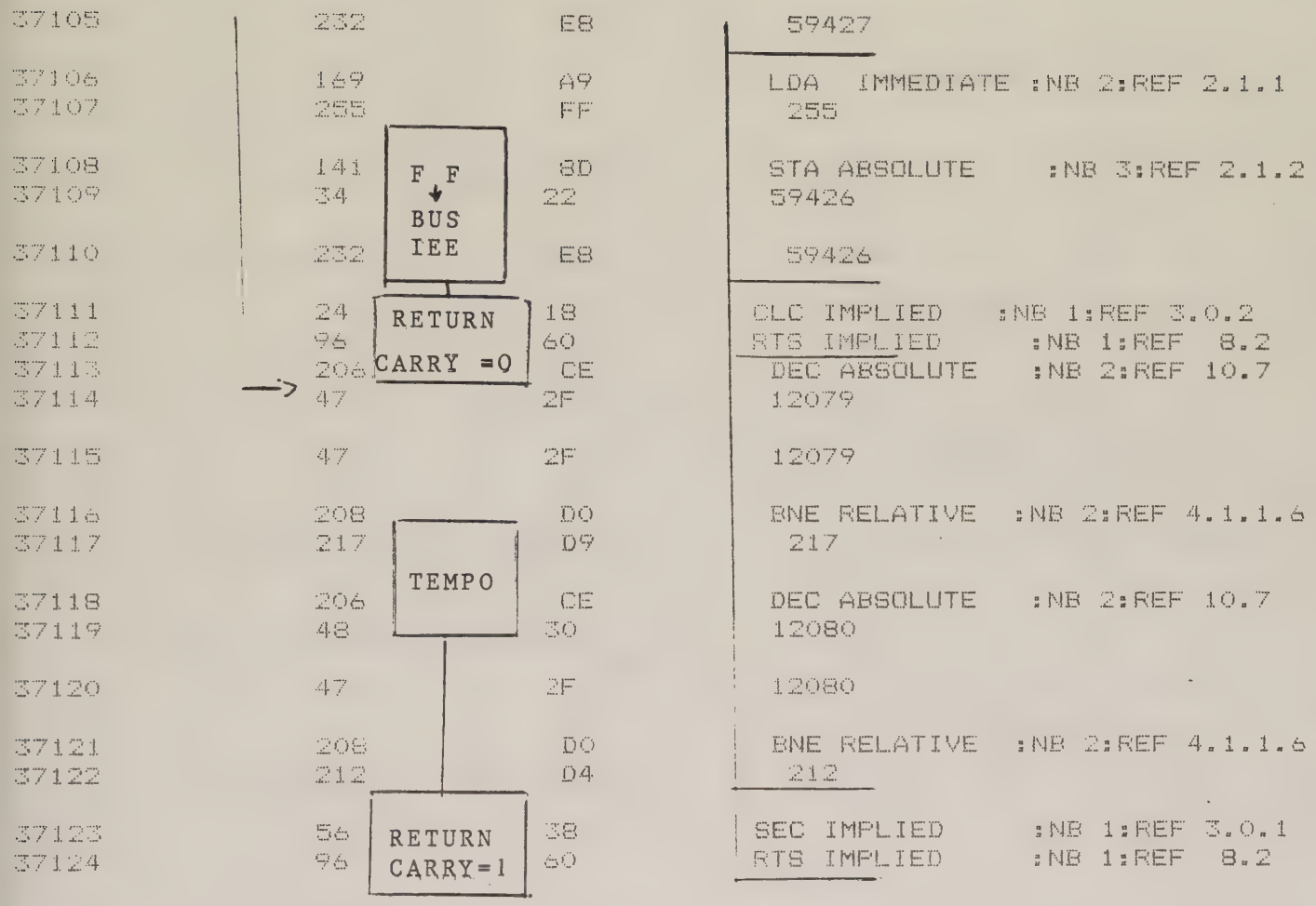


Fig. 4 : Programme RECEP DATA (feuille 1)

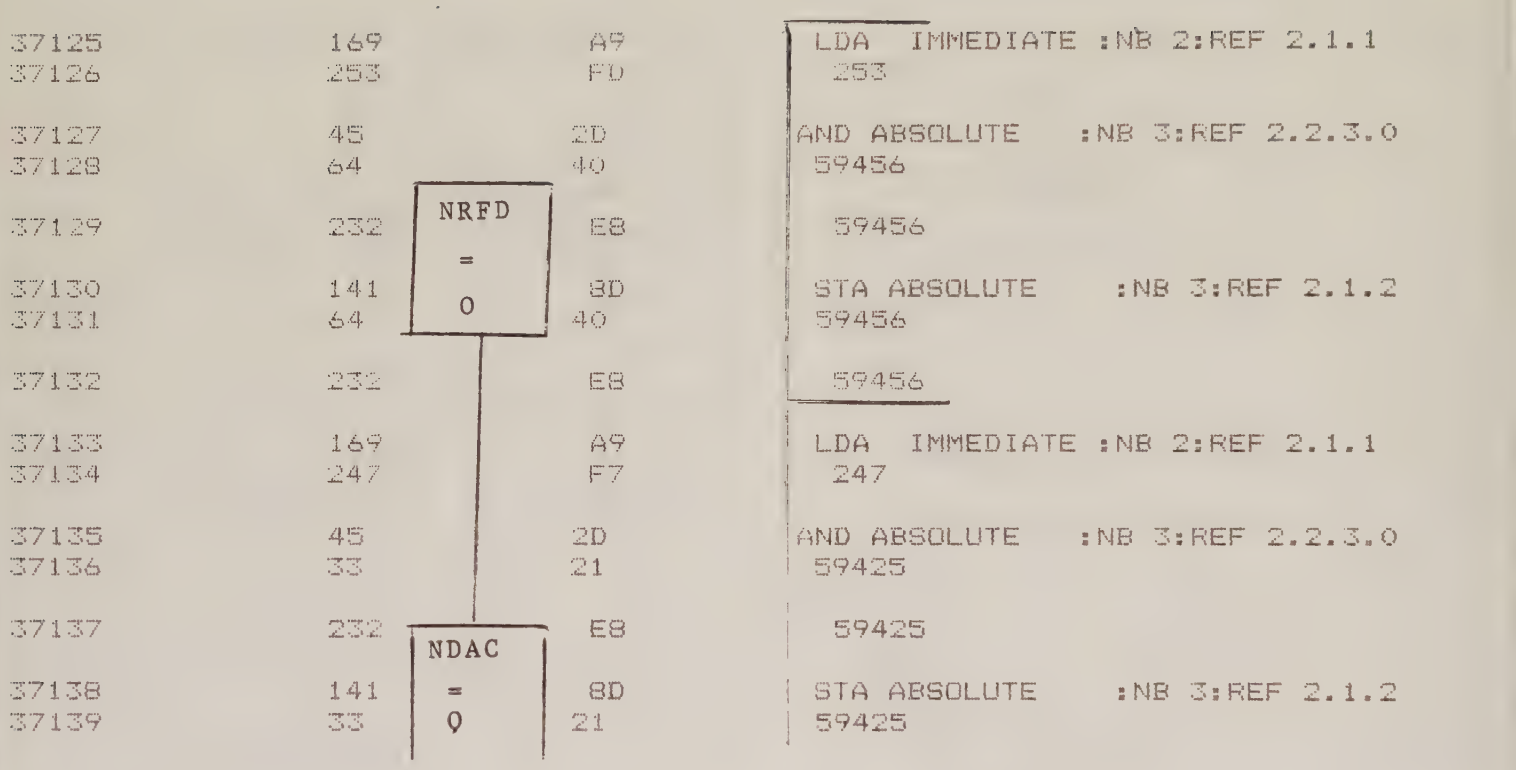


Fig. 4 ; Programme RECEP DATA (feuille 2)

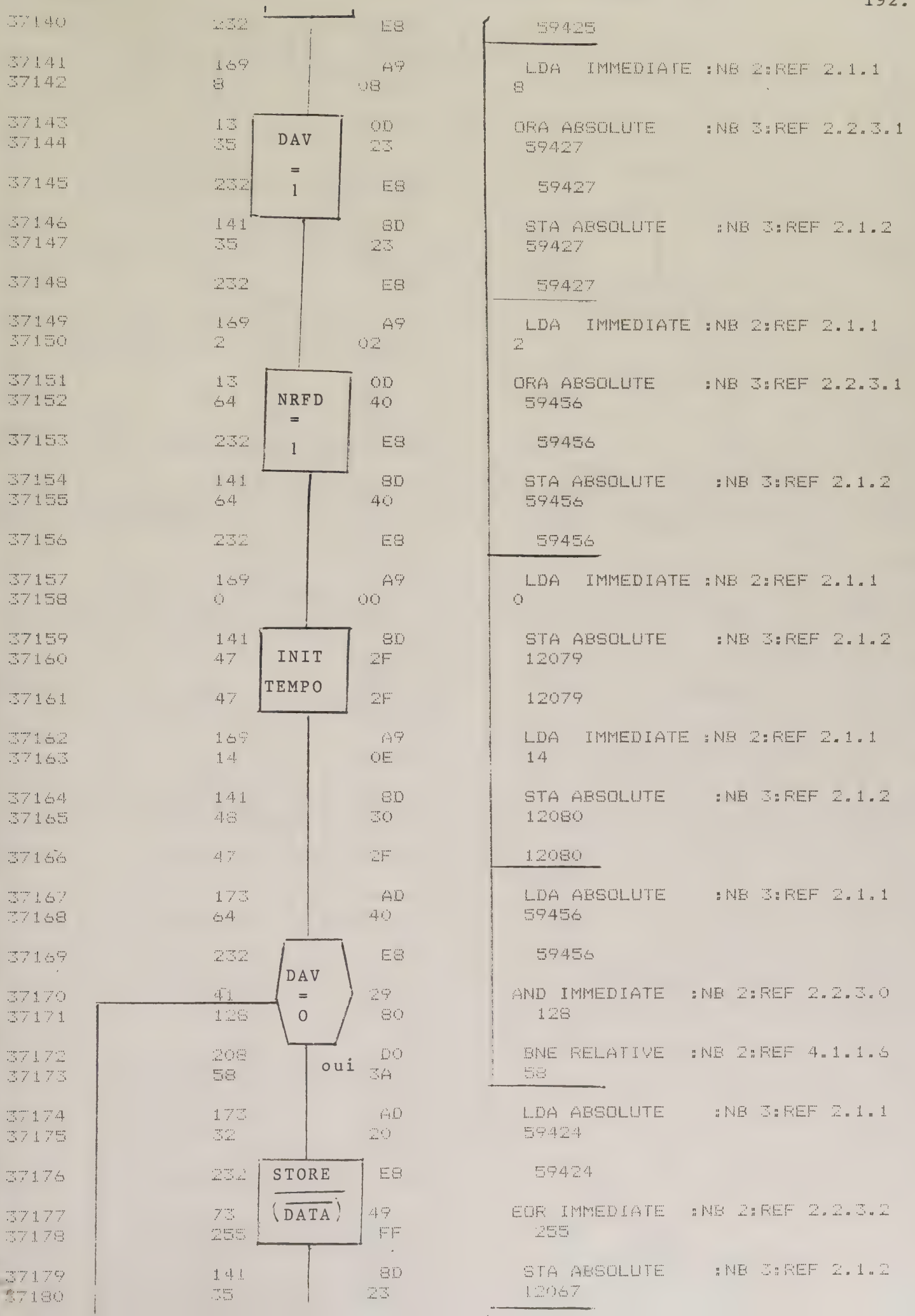
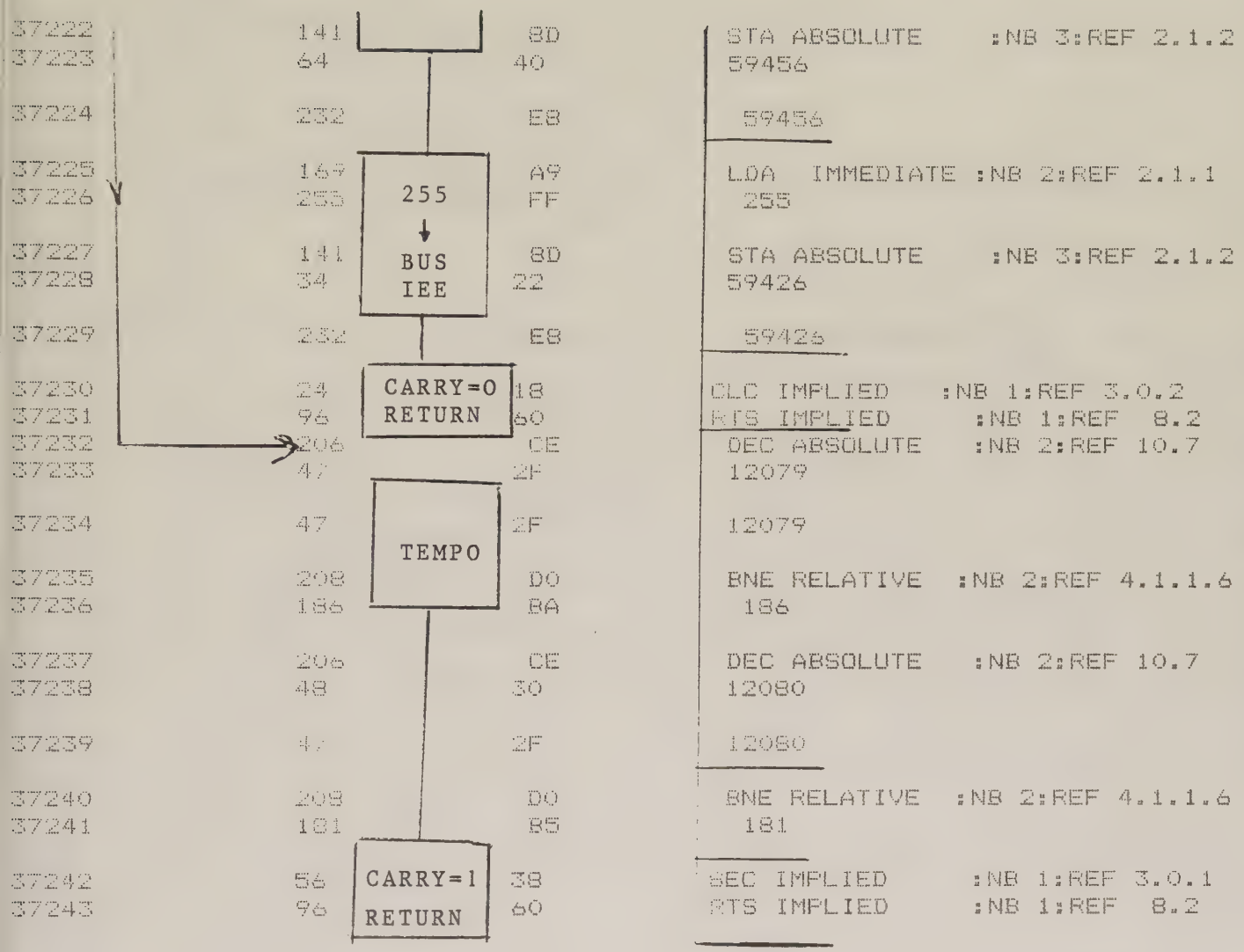


Fig. 4 : Programme RECEPT DATA (feuille 3)

```
37181   47          2F      12067
37182   173         AD      LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
37183   16          10      59408
37184   232         E8       59408
37185   170         AA      TAX IMPLIED      :NB 1:REF 7.11
37186   169         A9      LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37187   253         FD       253
37188   45          2D      AND ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.2.3.0
37189   64          40       59456
37190   232         E8       59456
37191   141         8D      STA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.2
37192   64          40       59456
37193   232         E8       59456
37194   169         A9       LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37195   8           08      8
37196   13          0D      ORA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.2.3.1
37197   33          21       59425
37198   232         E8       59425
37199   141         8D      STA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.2
37200   33          21       59425
37201   232         E8       59425
37202   173         AD      LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
37203   64          40       59456
37204   232         E8       59456
37205   41          29      AND IMMEDIATE   :NB 2:REF 2.2.3.0
37206   128         80       128
37207   240         F0      BEQ RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.5
37208   249         F9       249
37209   169         A9       LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37210   247         F7       247
37211   45          2D      AND ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.2.3.0
37212   33          21       59425
37213   232         E8       59425
37214   141         8D      STA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.2
37215   33          21       59425
37216   232         E8       59425
37217   169         A9       LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37218   2           02      2
37219   13          0D      ORA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.2.3.1
37220   64          40       59456
37221   232         E8       59456
```

Fig. 4 Programme RECEP DATA (feuille 4 et fin)




```
37222  141  8D   STA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.2
37223   64  40   59456
37224  232  E8    59456
37225  169  A9   LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37226  255  FF    255
37227  141  8D   STA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.2
37228   34  22   59426
37229  232  E8    59426
37230   24  18   CLC IMPLIED    :NB 1:REF 3.0.2
37231   96  60   RTS IMPLIED      :NB 1:REF  8.2
37232  206  CE    DEC ABSOLUTE    :NB 2:REF 10.7
37233   47  2F    12079
37234   47  2F    12079
37235  208  D0    BNE RELATIVE   :NB 2:REF 4.1.1.6
37236  186  BA     186
37237  206  CE    DEC ABSOLUTE    :NB 2:REF 10.7
37238   48  30    12080
37239   47  2F    12080
37240  208  D0    BNE RELATIVE   :NB 2:REF 4.1.1.6
37241  181  B5     181
37242   56  38   SEC IMPLIED      :NB 1:REF 3.0.1
37243   96  60   RTS IMPLIED      :NB 1:REF  8.2
```

Fig.5 : Programme ADRESS DATA (feuille 1)

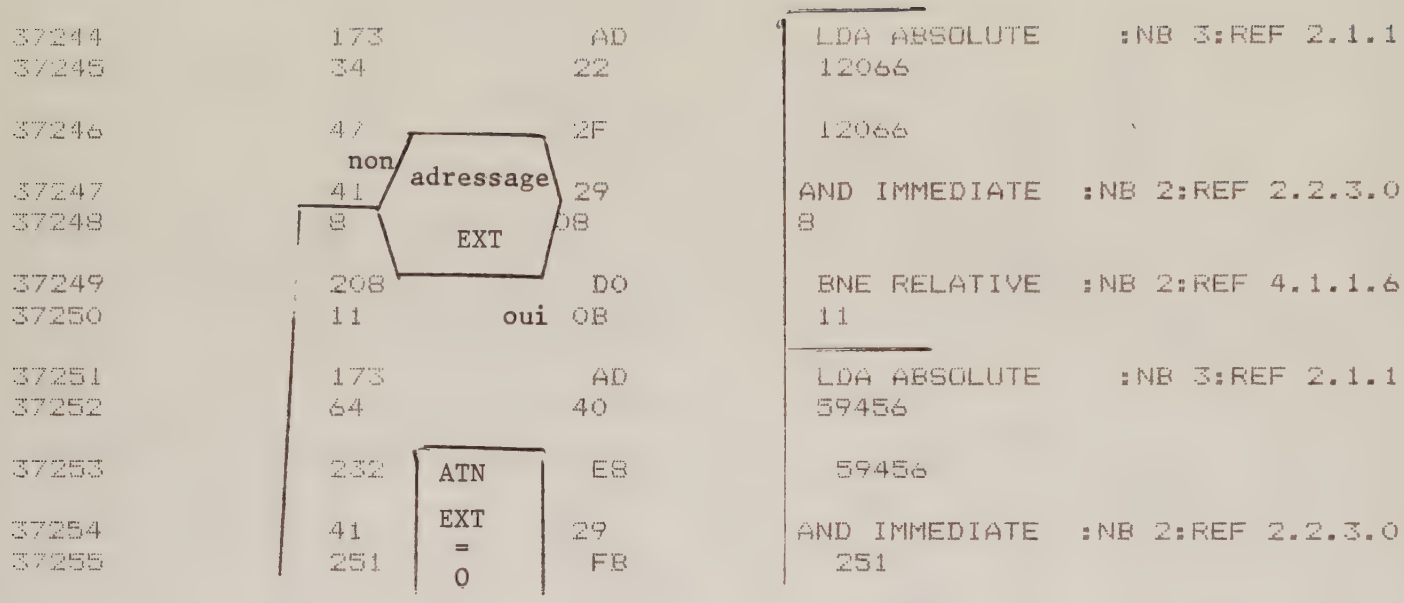
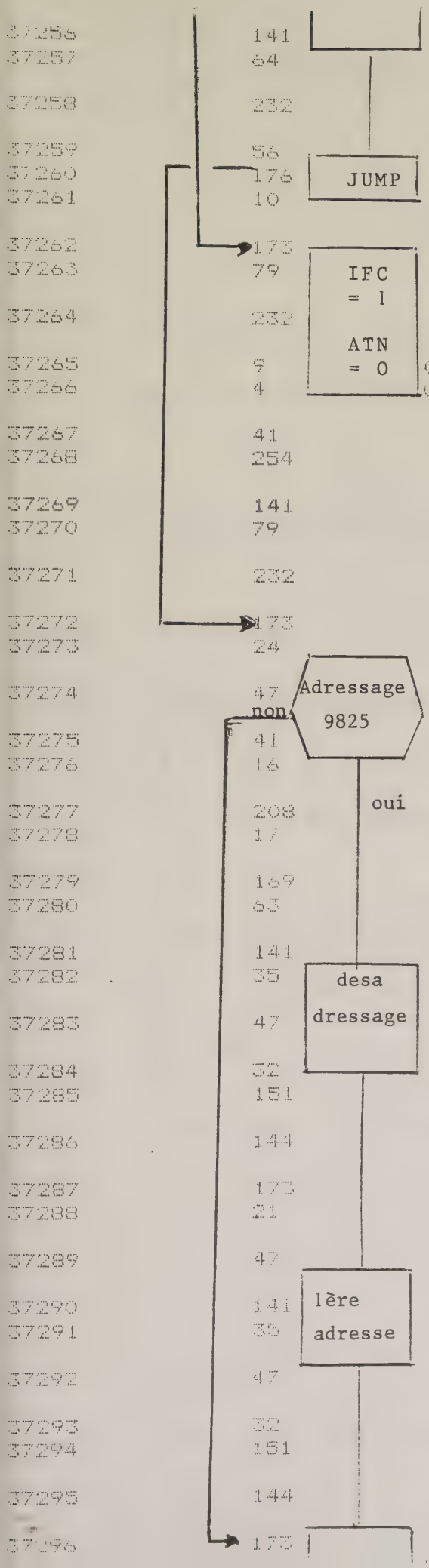
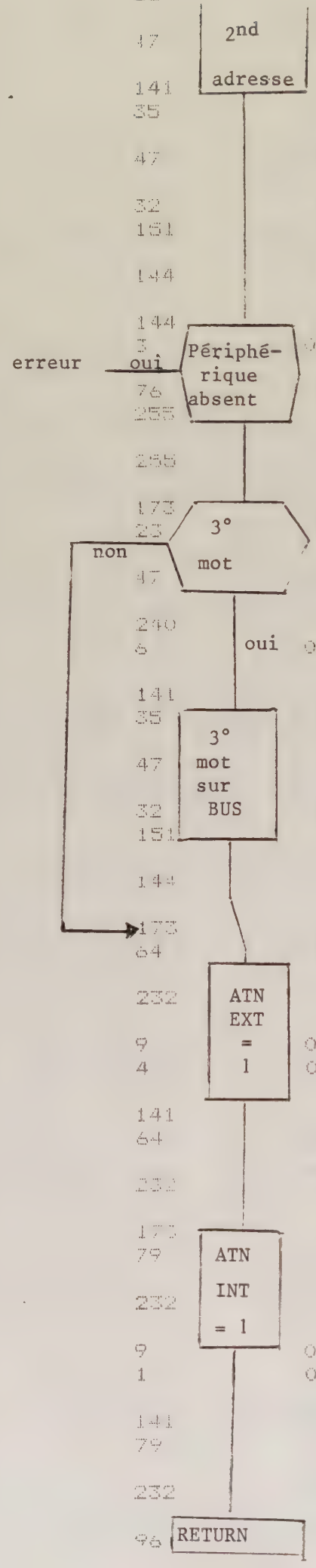


Fig.5 : Programme ADRESS DATA (feuille 2)



37256	141	8D	STA ABSOLUTE	:NB 3:REF 2.1.2
37257	64	40	59456	
37258	232	E8	59456	
37259	56	38	SEC IMPLIED	:NB 1:REF 3.0.1
37260	176	B0	BCS RELATIVE	:NB 2:REF 4.1.1.4
37261	10	0A	10	
37262	173	AD	LDA ABSOLUTE	:NB 3:REF 2.1.1
37263	79	4F	59471	
37264	232	E8	59471	
37265	9	09	ORA IMMEDIATE	:NB 2:REF 2.2.3.1
37266	4	04	4	
37267	41	29	AND IMMEDIATE	:NB 2:REF 2.2.3.0
37268	254	FE	254	
37269	141	8D	STA ABSOLUTE	:NB 3:REF 2.1.2
37270	79	4F	59471	
37271	232	E8	59471	
37272	173	AD	LDA ABSOLUTE	:NB 3:REF 2.1.1
37273	24	18	12056	
37274	47	2F	12056	
37275	41	29	AND IMMEDIATE	:NB 2:REF 2.2.3.0
37276	16	10	16	
37277	208	D0	BNE RELATIVE	:NB 2:REF 4.1.1.6
37278	17	11	17	
37279	169	A9	LDA IMMEDIATE	:NB 2:REF 2.1.1
37280	63	3F	63	
37281	141	8D	STA ABSOLUTE	:NB 3:REF 2.1.2
37282	35	23	12067	
37283	47	2F	12067	
37284	32	20	JSR ABSOLUTE	:NB 3:REF 8.1
37285	151	97	37015	
37286	144	90	37015	
37287	173	AD	LDA ABSOLUTE	:NB 3:REF 2.1.1
37288	21	15	12053	
37289	47	2F	12053	
37290	141	8D	STA ABSOLUTE	:NB 3:REF 2.1.2
37291	35	23	12067	
37292	47	2F	12067	
37293	32	20	JSR ABSOLUTE	:NB 3:REF 8.1
37294	151	97	37015	
37295	144	90	37015	
37296	173	AD	LDA ABSOLUTE	:NB 3:REF 2.1.1

Fig. 5 Programme ADRESS DATA (feuille 3 et fin)




```
37297   22   16    12054
37298   47   2F    12054
37299  141   8D    STA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.2
37300   35   23    12067
37301   47   2F    12067
37302   32   20    JSR  ABSOLUTE   :NB 3:REF 8.1
37303  151   97      37015
37304  144   90      37015
37305  144   90    BCC RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.3
37306    3   03    3
37307   76   4C    JMP  ABSOLUTE   :NB 3:REF 4.0.2
37308  255   FF      65535
37309  255   FF      65535
37310  173   AD    LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
37311   23   17    12055
37312   47   2F    12055
37313  240   F0    BEQ RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.5
37314    6   06    6
37315  141   8D    STA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.2
37316   35   23    12067
37317   47   2F    12067
37318   32   20    JSR  ABSOLUTE   :NB 3:REF 8.1
37319  151   97      37015
37320  144   90      37015
37321  173   AD    LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
37322   64   40    59456
37323  232   E8      59456
37324    9   09    ORA IMMEDIATE    :NB 2:REF 2.2.3.1
37325    4   04    4
37326  141   8D    STA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.2
37327   64   40    59456
37328  232   E8      59456
37329  173   AD    LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
37330   79   4F    59471
37331  232   E8      59471
37332    9   09    ORA IMMEDIATE    :NB 2:REF 2.2.3.1
37333    1   01    1
37334  141   8D    STA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.2
37335   79   4F    59471
37336  232   E8      59471
37337   96   60    RTS IMPLIED      :NB 1:REF  8.2
```

Fig.6 Programme RECEP GENE (feuille 1)

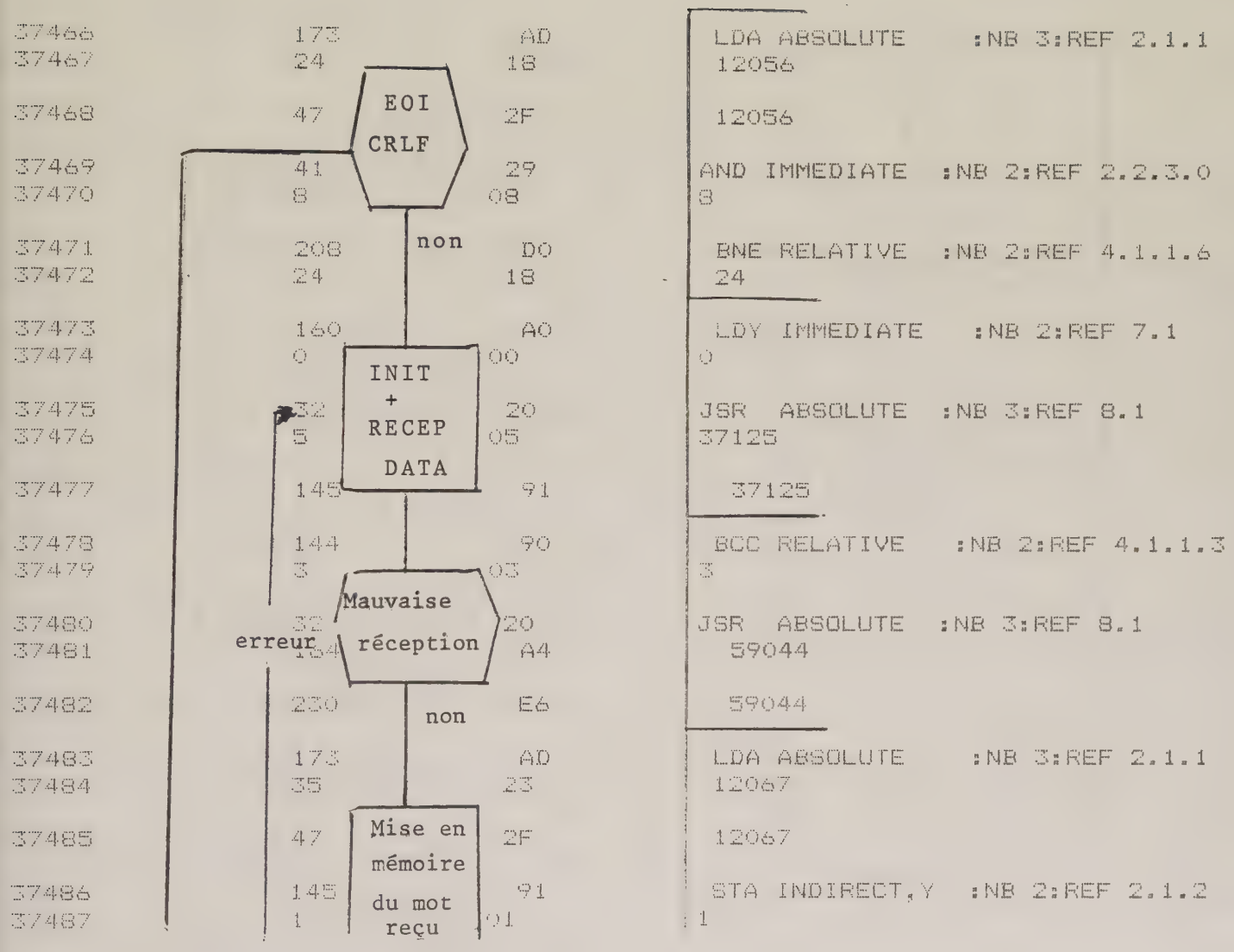
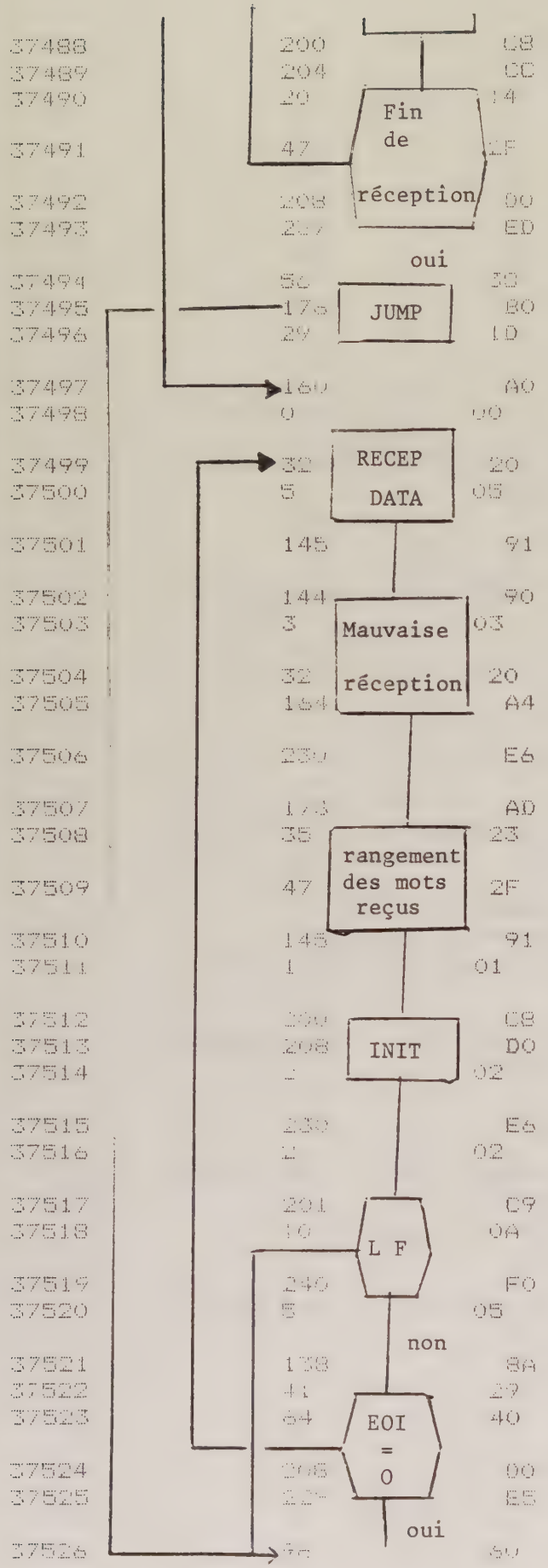


Fig. 6 : Programme RECEP GENE (feuille 2 et fin)




```
37488  200  C8    INY IMPLIED      :NB 1:REF 7.5
37489  204  CC    CPY ABSOLUTE     :NB 3:REF 7.9
37490  20   14    12052
37491  47   2F    12052
37492  208  D0    BNE RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.6
37493  237  ED    237
37494  56   38    SEC IMPLIED      :NB 1:REF 3.0.1
37495  176  B0    BCS RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.4
37496  29   1D    29
37497  160  A0    LDY IMMEDIATE    :NB 2:REF 7.1
37498  0    00    0
37499  32   20    JSR ABSOLUTE     :NB 3:REF 8.1
37500  5    05    37125
37501  145  91      37125
37502  144  90    BCC RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.3
37503  3    03    3
37504  32   20    JSR ABSOLUTE     :NB 3:REF 8.1
37505  164  A4      59044
37506  230  E6      59044
37507  173  AD    LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
37508  35   23    12067
37509  47   2F    12067
37510  145  91    STA INDIRECT,Y   :NB 2:REF 2.1.2
37511  1    01    1
37512  200  C8    INY IMPLIED      :NB 1:REF 7.5
37513  208  D0    BNE RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.6
37514  2    02    2
37515  230  E6    INC ZERO PAGE    :NB 2:REF 10.6
37516  2    02    2
37517  201  C9    CMP IMMEDIATE    :NB 2:REF 4.2.1
37518  10   0A    10
37519  240  F0    BEQ RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.5
37520  5    05    5
37521  138  8A    TXA IMPLIED      :NB 1:REF 7.12
37522  41   29    AND IMMEDIATE    :NB 2:REF 2.2.3.0
37523  64   40    64
37524  208  D0    BNE RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.6
37525  229  E5      229
37526  96   60    RTS IMPLIED      :NB 1:REF  8.2
```

Fig. 7 : Programme TRANS GENE (feuille 1)

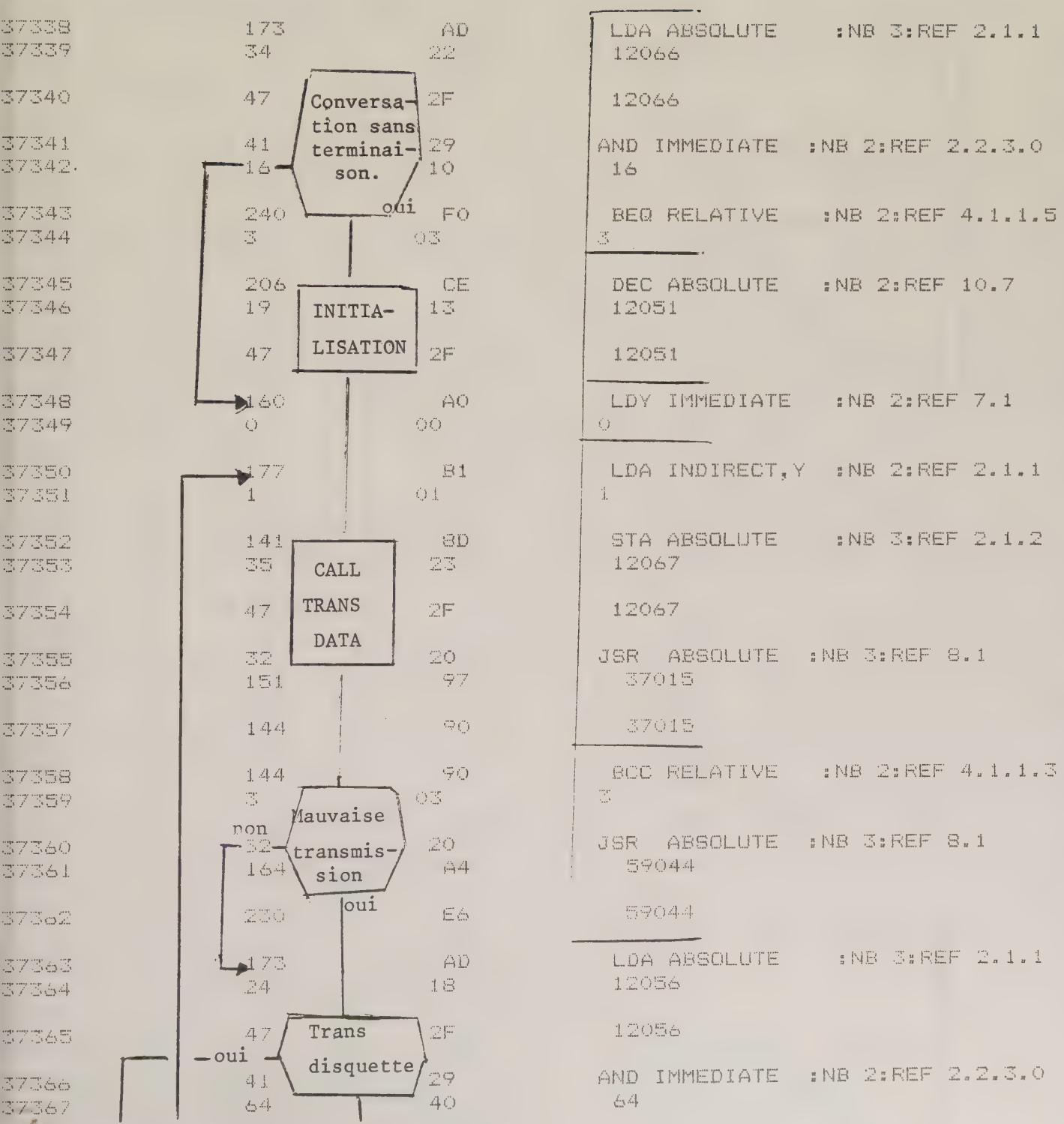
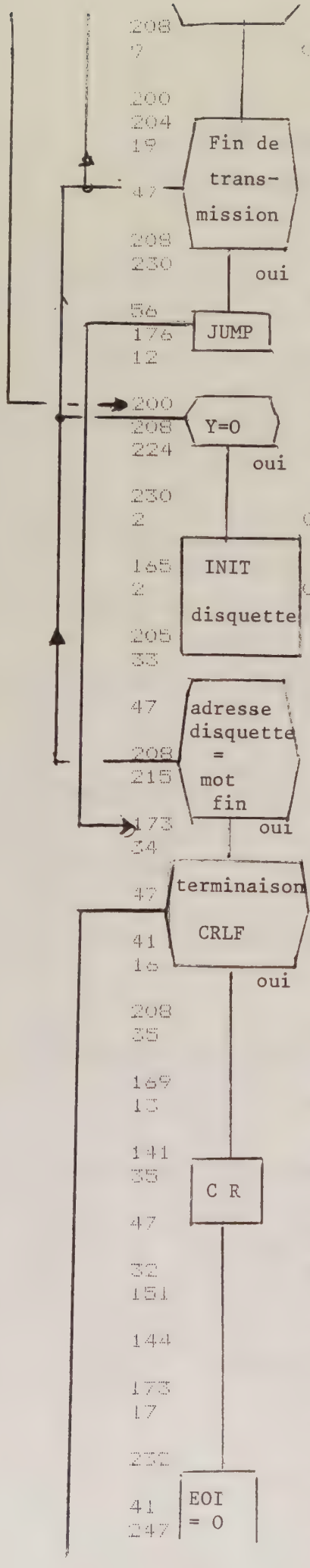


Fig. 7 : Programme TRANS GENE (feuille 2)




```
37368  208   DO    BNE RELATIVE  :NB 2:REF 4.1.1.6
37369  7     07    7
37370  200   C8    INY IMPLIED     :NB 1:REF 7.5
37371  204   CC    CPY ABSOLUTE    :NB 3:REF 7.9
37372  19    13    12051
37373  47    2F    12051
37374  208   DO    BNE RELATIVE  :NB 2:REF 4.1.1.6
37375  230   E6    230
37376  56    38    SEC IMPLIED     :NB 1:REF 3.0.1
37377  176   B0    BCS RELATIVE    :NB 2:REF 4.1.1.4
37378  12    0C    12
37379  200   C8    INY IMPLIED     :NB 1:REF 7.5
37380  208   DO    BNE RELATIVE  :NB 2:REF 4.1.1.6
37381  224   E0    224
37382  230   E6    INC ZERO PAGE  :NB 2:REF 10.6
37383  2     02    2
37384  165   A5    LDA  ZERO PAGE :NB 2:REF 2.1.1
37385  2     02    2
37386  205   CD    CMP ABSOLUTE    :NB 3:REF 4.2.1
37387  33    21    12065
37388  47    2F    12065
37389  208   DO    BNE RELATIVE  :NB 2:REF 4.1.1.6
37390  215   D7    215
37391  173   AD    LDA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.1
37392  34    22    12066
37393  47    2F    12066
37394  41    29    AND IMMEDIATE  :NB 2:REF 2.2.3.0
37395  16    10    16
37396  208   DO    BNE RELATIVE  :NB 2:REF 4.1.1.6
37397  35    23    35
37398  169   A9    LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37399  13    00    13
37400  141   8D    STA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.2
37401  35    23    12067
37402  47    2F    12067
37403  32    20    JSR  ABSOLUTE  :NB 3:REF 8.1
37404  151   97    37015
37405  144   90    37015
37406  173   AD    LDA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.1
37407  17    11    59409
37408  232   E8    59409
37409  41    29    AND IMMEDIATE  :NB 2:REF 2.2.3.0
37410  247   F7    247
```

Fig. 7 Programme TRANS GENE (feuille 3)

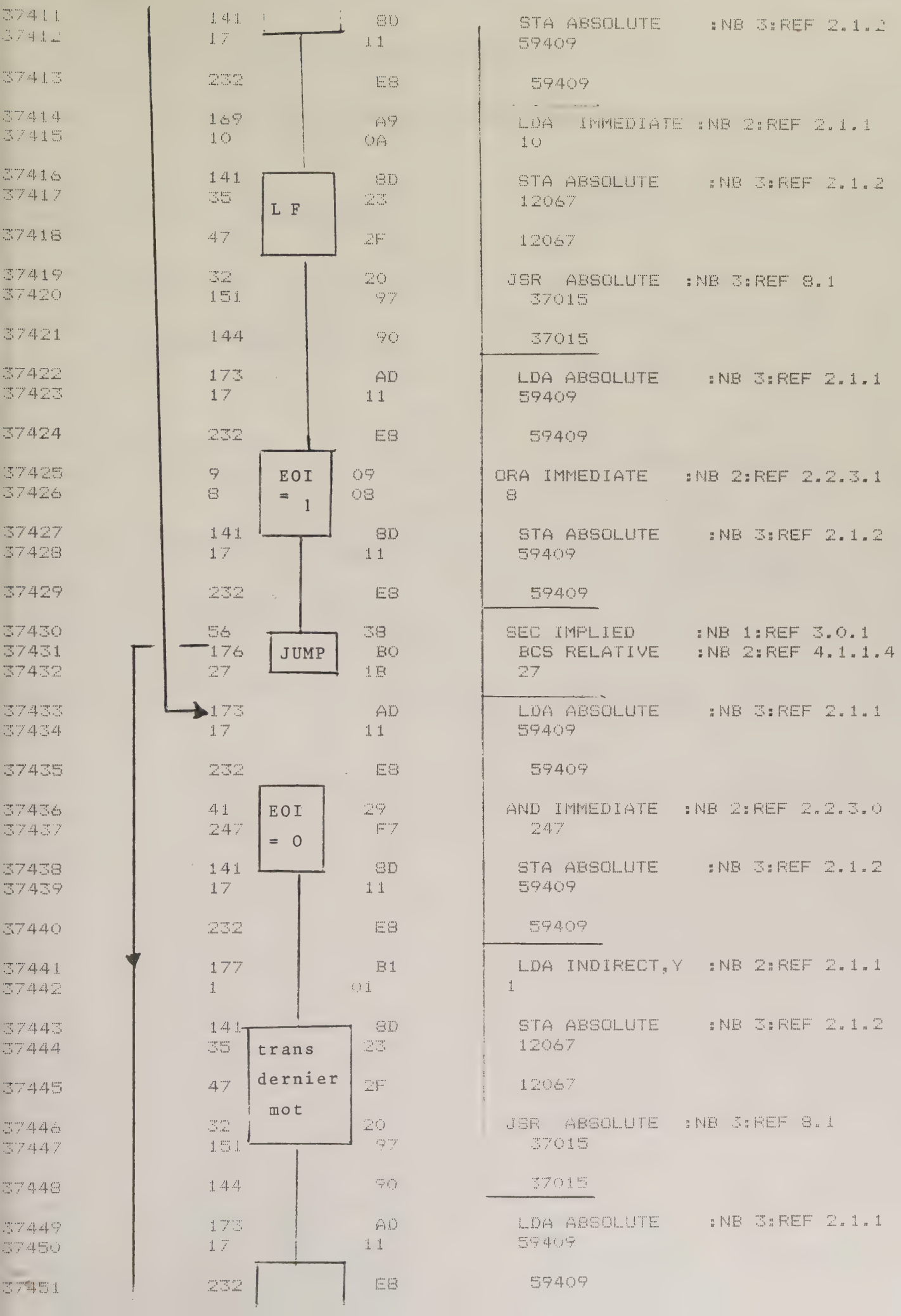


Fig. 7 : Programme TRANS GENE (feuille 4 et fin)

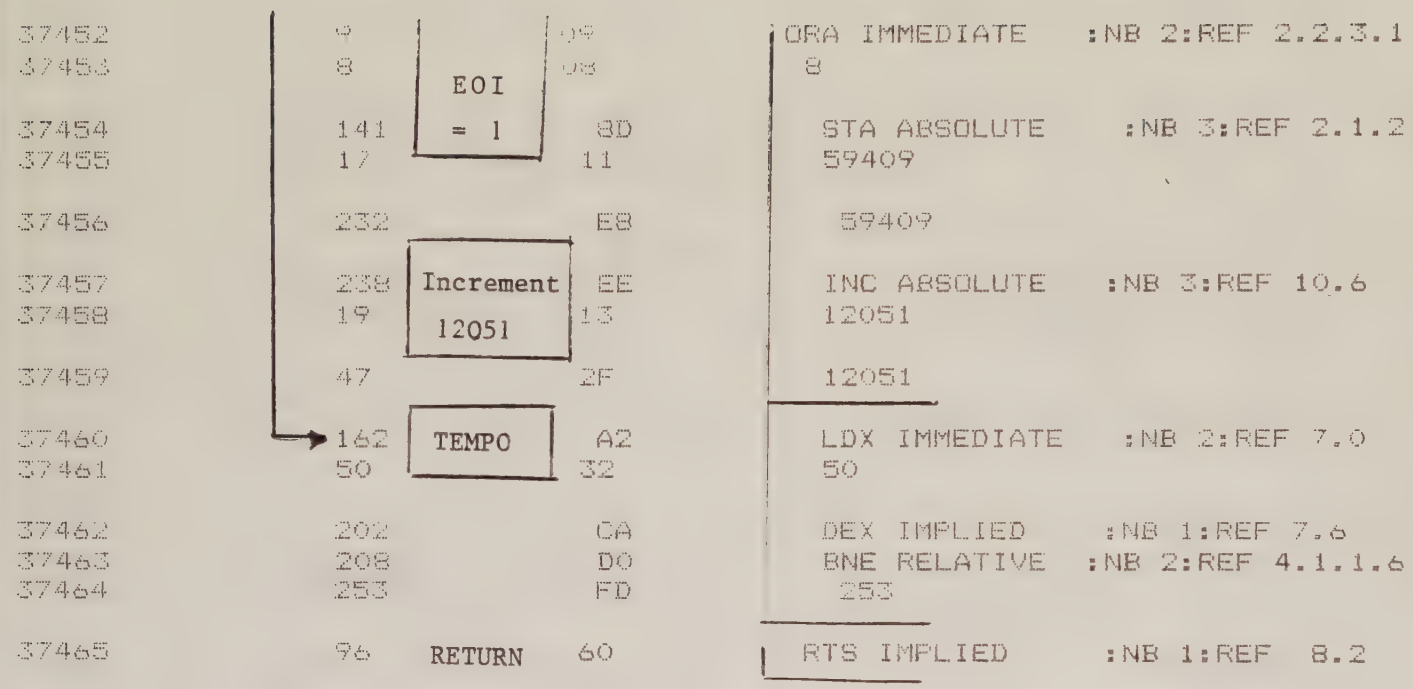


Fig. 8 : Programme GESTION NMI (feuille 1)

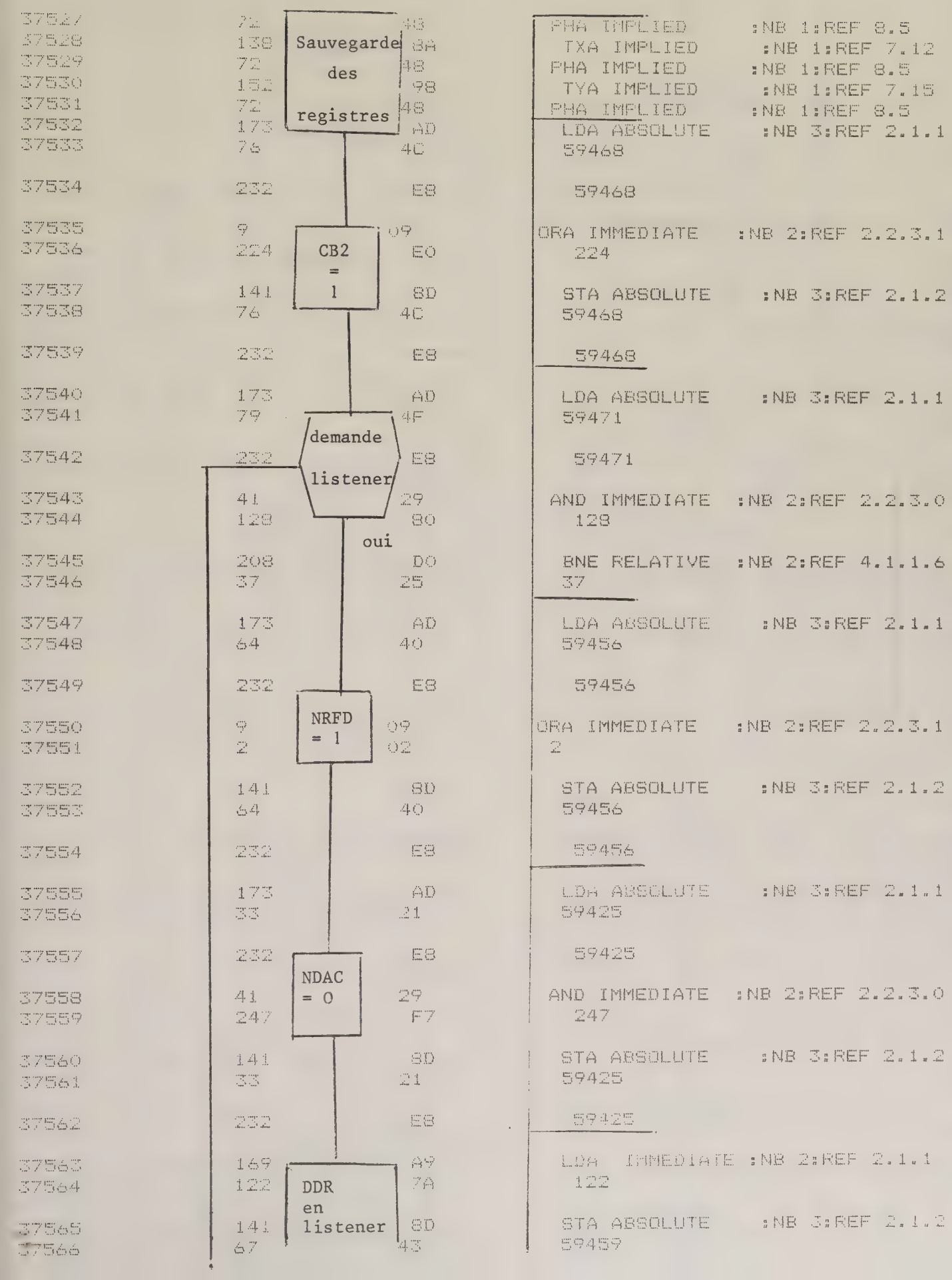
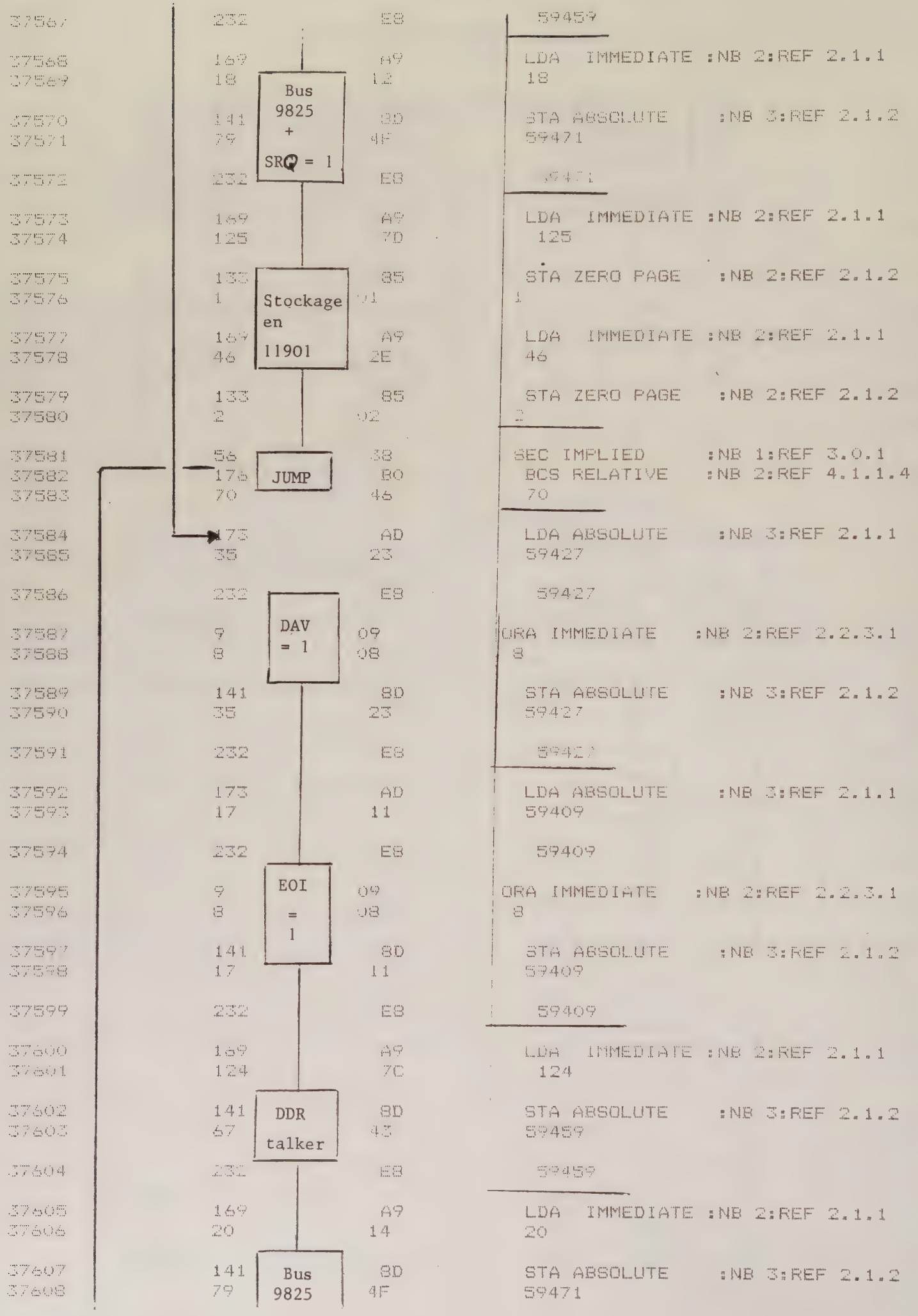
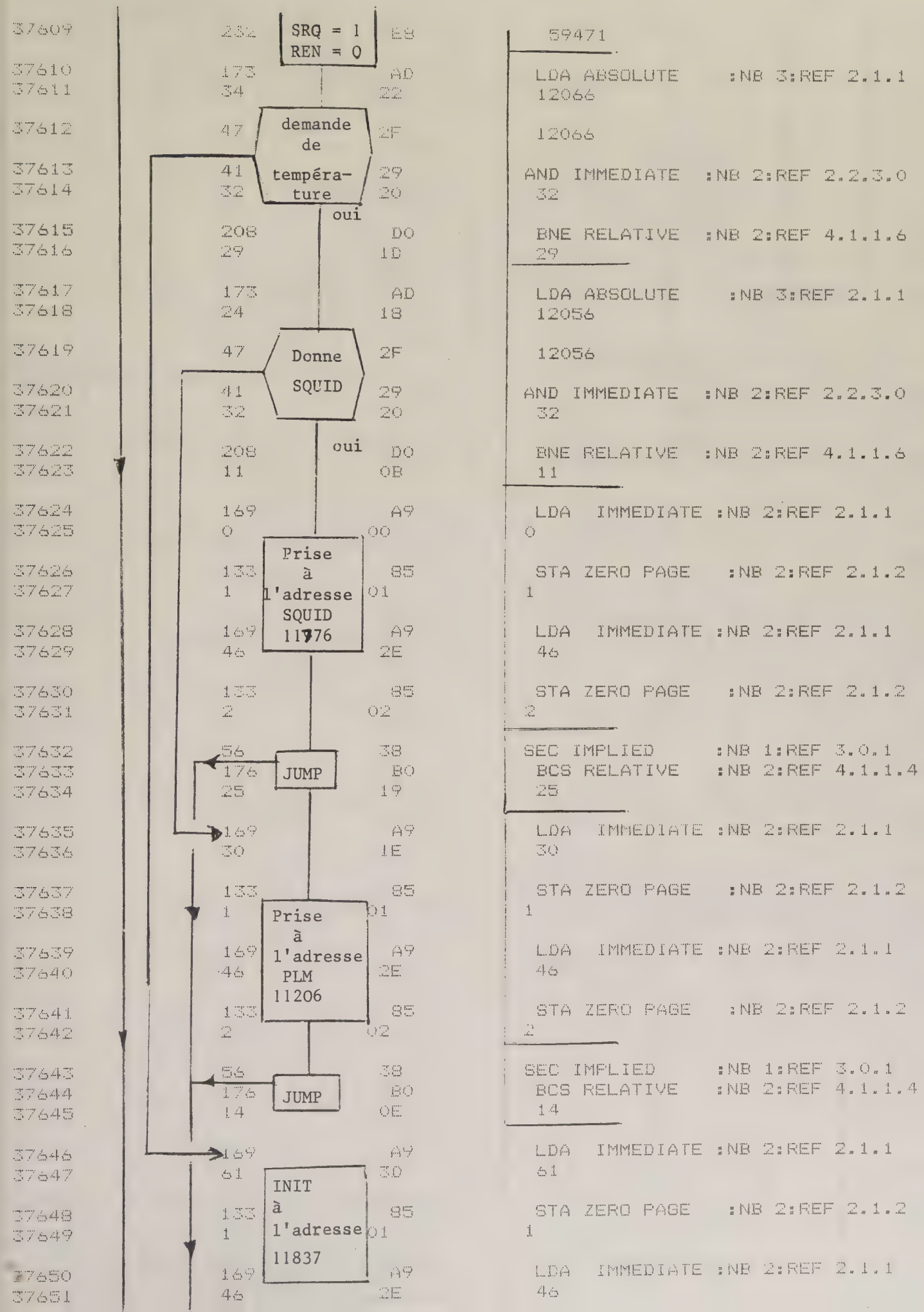


Fig.8 Programme GESTION NMI (feuille 2)



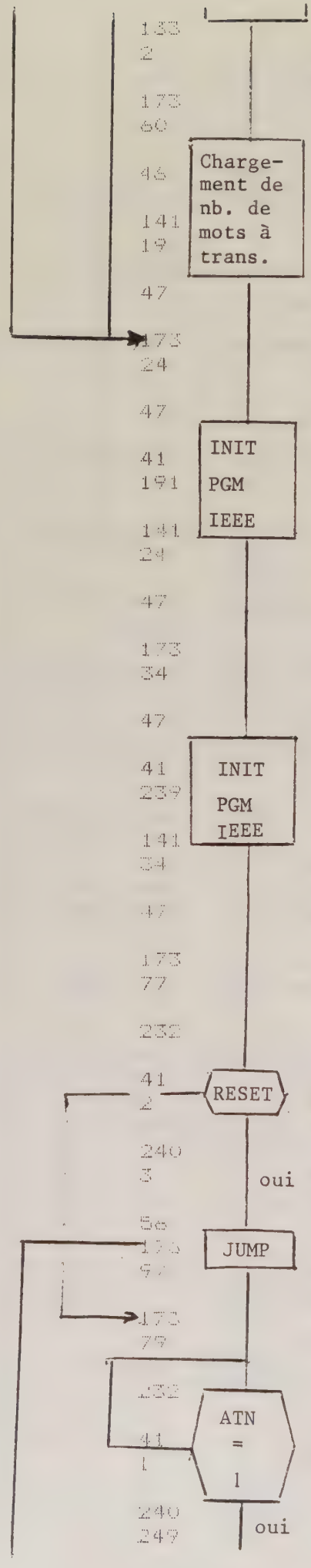

```
37567   232          E8        59459
37568   169          A9        LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37569   18           12        18
37570   141          8D        STA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.2
37571   79           4F        59471
37572   232          E8        59471
37573   169          A9        LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37574   125          7D        125
37575   133          85        STA ZERO PAGE   :NB 2:REF 2.1.2
37576   1            01        1
37577   169          A9        LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37578   46           2E        46
37579   133          85        STA ZERO PAGE   :NB 2:REF 2.1.2
37580   2            02        2
37581   56           38        SEC IMPLIED     :NB 1:REF 3.0.1
37582   176          B0        BCS RELATIVE    :NB 2:REF 4.1.1.4
37583   70           46        70
37584   173          AD        LDA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.1
37585   35           23        59427
37586   232          E8        59427
37587   9            09        ORA IMMEDIATE   :NB 2:REF 2.2.3.1
37588   8            08        8
37589   141          8D        STA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.2
37590   35           23        59427
37591   232          E8        59427
37592   173          AD        LDA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.1
37593   17           11        59409
37594   232          E8        59409
37595   9            09        ORA IMMEDIATE   :NB 2:REF 2.2.3.1
37596   8            08        8
37597   141          8D        STA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.2
37598   17           11        59409
37599   232          E8        59409
37600   169          A9        LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37601   124          7C        124
37602   141          8D        STA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.2
37603   67           43        59459
37604   232          E8        59459
37605   169          A9        LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37606   20           14        20
37607   141          8D        STA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.2
37608   79           4F        59471
```

Fig.8 : Programme GESTION NMI (feuille 3)

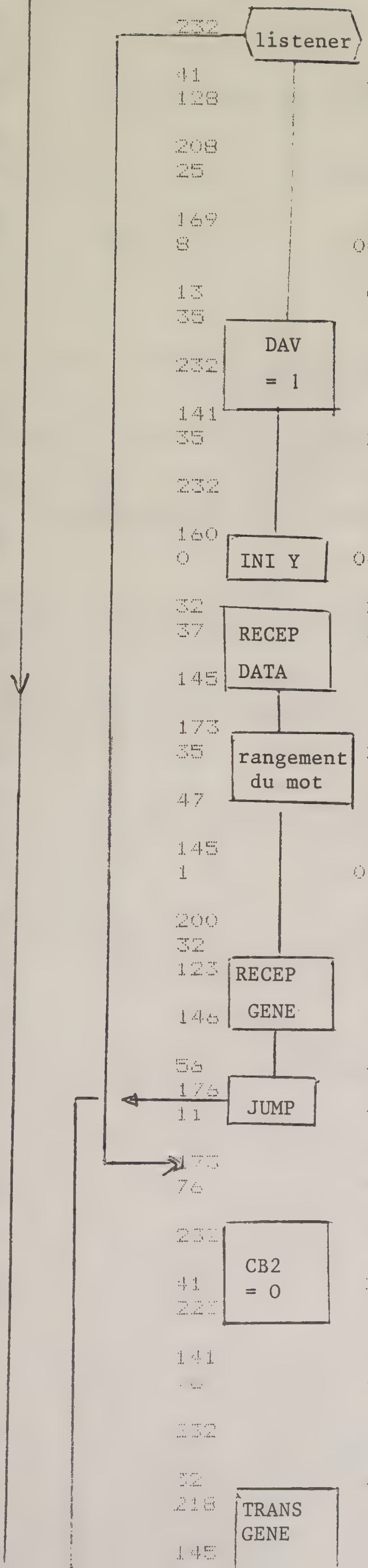



```
37609  232  E8    59471
37610  173  AD    LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
37611  34   22    12066
37612  47   2F    12066
37613  41   29    AND IMMEDIATE    :NB 2:REF 2.2.3.0
37614  32   20    32
37615  208  DO    BNE RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.6
37616  29   1D    29
37617  173  AD    LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
37618  24   18    12056
37619  47   2F    12056
37620  41   29    AND IMMEDIATE    :NB 2:REF 2.2.3.0
37621  32   20    32
37622  208  DO    BNE RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.6
37623  11   0B    11
37624  169  A9    LDA  IMMEDIATE   :NB 2:REF 2.1.1
37625  0    00    0
37626  133  85    STA ZERO PAGE    :NB 2:REF 2.1.2
37627  1    01    1
37628  169  A9    LDA  IMMEDIATE   :NB 2:REF 2.1.1
37629  46   2E    46
37630  133  85    STA ZERO PAGE    :NB 2:REF 2.1.2
37631  2    02    2
37632  56   38    SEC IMPLIED      :NB 1:REF 3.0.1
37633  176  BO    BCS RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.4
37634  25   19    25
37635  169  A9    LDA  IMMEDIATE   :NB 2:REF 2.1.1
37636  30   1E    30
37637  133  85    STA ZERO PAGE    :NB 2:REF 2.1.2
37638  1    01    1
37639  169  A9    LDA  IMMEDIATE   :NB 2:REF 2.1.1
37640  46   2E    46
37641  133  85    STA ZERO PAGE    :NB 2:REF 2.1.2
37642  2    02    2
37643  56   38    SEC IMPLIED      :NB 1:REF 3.0.1
37644  176  BO    BCS RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.4
37645  14   0E    14
37646  169  A9    LDA  IMMEDIATE   :NB 2:REF 2.1.1
37647  61   30    61
37648  133  85    STA ZERO PAGE    :NB 2:REF 2.1.2
37649  1    01    1
37650  169  A9    LDA  IMMEDIATE   :NB 2:REF 2.1.1
37651  46   2E    46
```

Fig.8 Programme GESTION NMI (feuille 4)




```
37652  133   85    STA ZERO PAGE    :NB 2:REF 2.1.2
37653  2     02    2
37654  173   AD    LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
37655  60    3C    11836
37656  46    2E    11836
37657  141   8D    STA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.2
37658  19    13    12051
37659  47    2F    12051
37660  173   AD    LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
37661  24    18    12056
37662  47    2F    12056
37663  41    29    AND IMMEDIATE    :NB 2:REF 2.2.3.0
37664  191   BF    191
37665  141   8D    STA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.2
37666  24    18    12056
37667  47    2F    12056
37668  173   AD    LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
37669  34    22    12066
37670  47    2F    12066
37671  41    29    AND IMMEDIATE    :NB 2:REF 2.2.3.0
37672  239   EF    239
37673  141   8D    STA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.2
37674  34    22    12066
37675  47    2F    12066
37676  173   AD    LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
37677  77    4D    59469
37678  232   E8    59469
37679  41    29    AND IMMEDIATE    :NB 2:REF 2.2.3.0
37680  2     02    2
37681  240   F0    BEQ RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.5
37682  3     03    3
37683  56    38    SEC IMPLIED      :NB 1:REF 3.0.1
37684  176   B0    BCS RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.4
37685  97    61    97
37686  173   AD    LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
37687  79    4F    59471
37688  232   E8    59471
37689  41    29    AND IMMEDIATE    :NB 2:REF 2.2.3.0
37690  1     01    1
37691  240   F0    BEQ RELATIVE     :NB 2:REF 4.1.1.5
37692  249   F9    249
```



37693	173	AD	LDA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.1.1
37694	79	4F	59471
37695	232	E8	59471
37696	41	29	AND IMMEDIATE :NB 2:REF 2.2.3.0
37697	128	80	128
37698	208	D0	BNE RELATIVE :NB 2:REF 4.1.1.6
37699	25	19	25
37700	169	A9	LDA IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
37701	8	08	8
37702	13	0D	ORA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.2.3.1
37703	35	23	59427
37704	232	E8	59427
37705	141	8D	STA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.1.2
37706	35	23	59427
37707	232	E8	59427
37708	160	A0	LDY IMMEDIATE :NB 2:REF 7.1
37709	0	00	0
37710	32	20	JSR ABSOLUTE :NB 3:REF 8.1
37711	37	25	37157
37712	145	91	37157
37713	173	AD	LDA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.1.1
37714	35	23	12067
37715	47	2F	12067
37716	145	91	STA INDIRECT,Y :NB 2:REF 2.1.2
37717	1	01	1
37718	200	C8	INY IMPLIED :NB 1:REF 7.5
37719	32	20	JSR ABSOLUTE :NB 3:REF 8.1
37720	123	7B	37499
37721	146	92	37499
37722	56	38	SEC IMPLIED :NB 1:REF 3.0.1
37723	176	B0	BCS RELATIVE :NB 2:REF 4.1.1.4
37724	11	0B	11
37725	173	AD	LDA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.1.1
37726	76	4C	59468
37727	232	E8	59468
37728	41	29	AND IMMEDIATE :NB 2:REF 2.2.3.0
37729	223	DF	223
37730	141	8D	STA ABSOLUTE :NB 3:REF 2.1.2
37731	76	4C	59468
37732	232	E8	59468
37733	32	20	JSR ABSOLUTE :NB 3:REF 8.1
37734	218	DA	37338
37735	145	91	37338

Fig. 8 Programme de GESTION NMI (feuille 6)

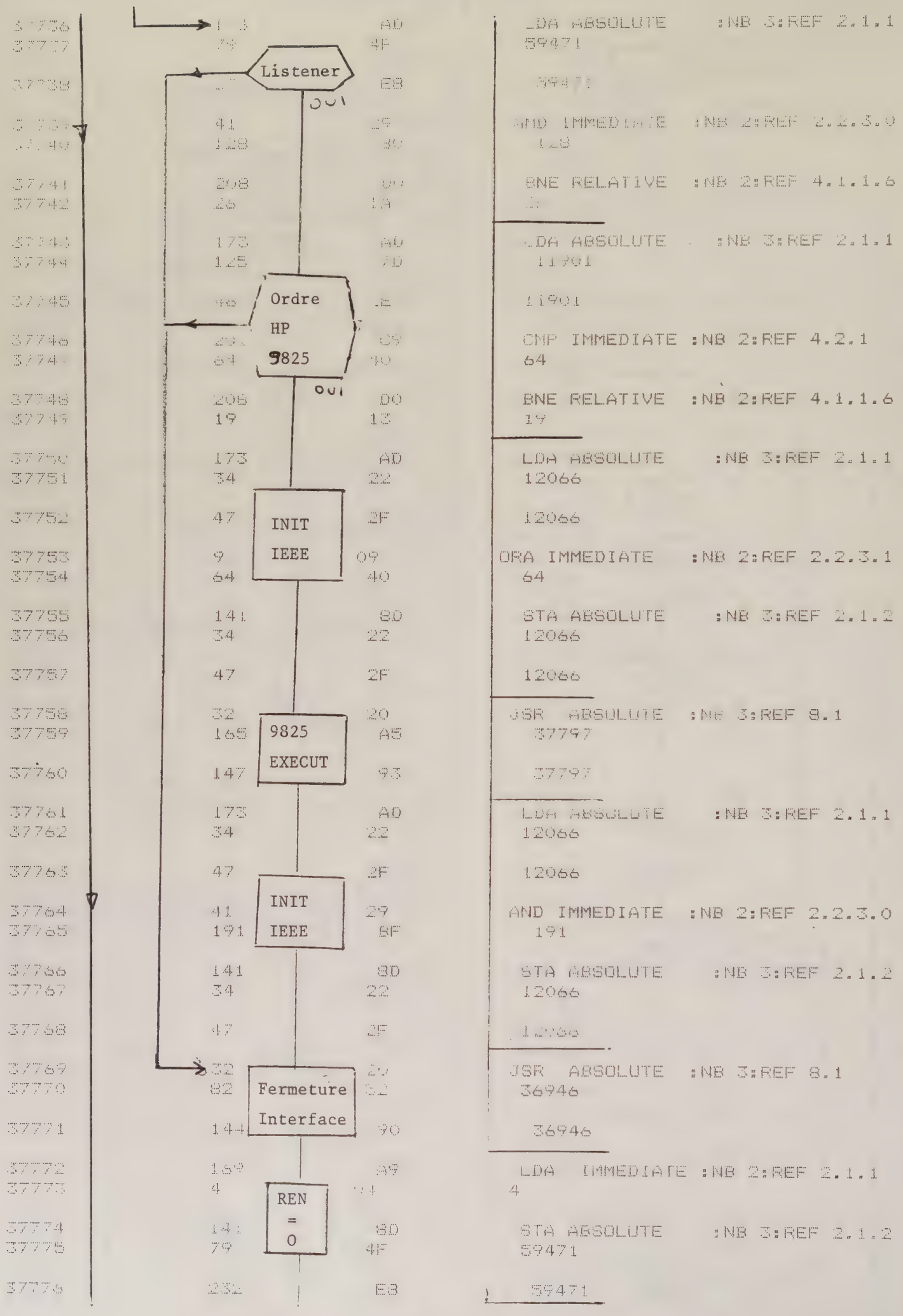


Fig. 8 Programme de GESTION NMI (feuille 7 et fin)

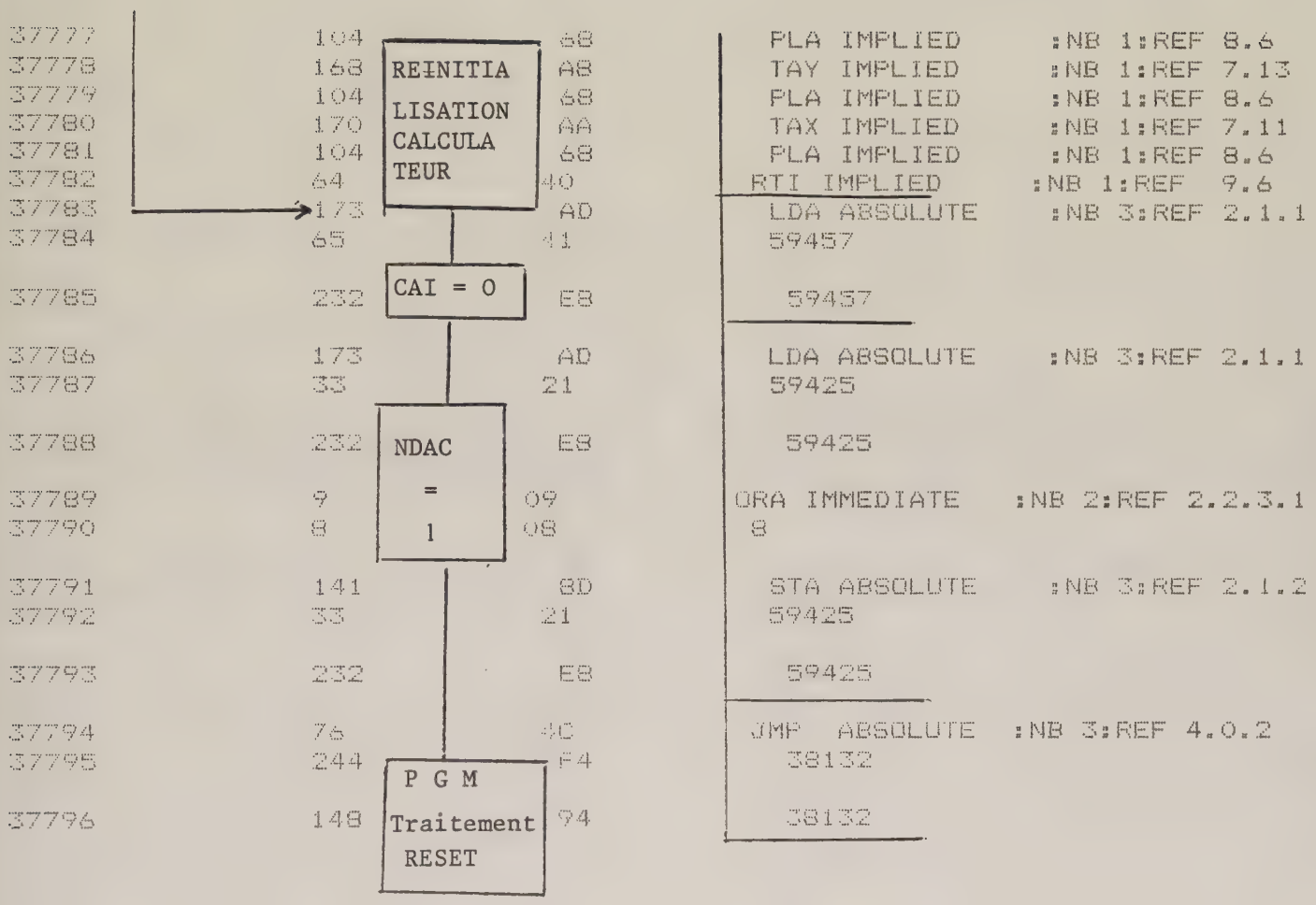


Fig. 9 - Programme 9825 EXECUT

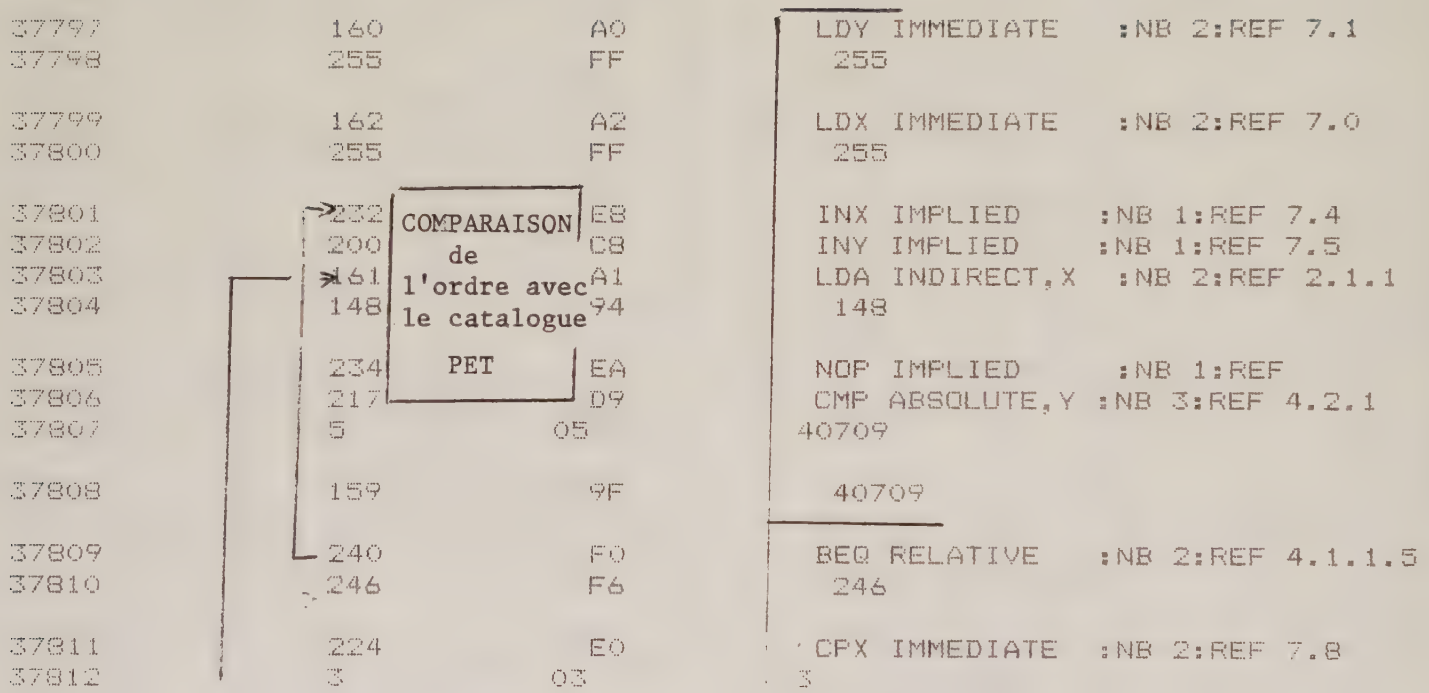


Fig. 9 Programme 9825 EXECUT

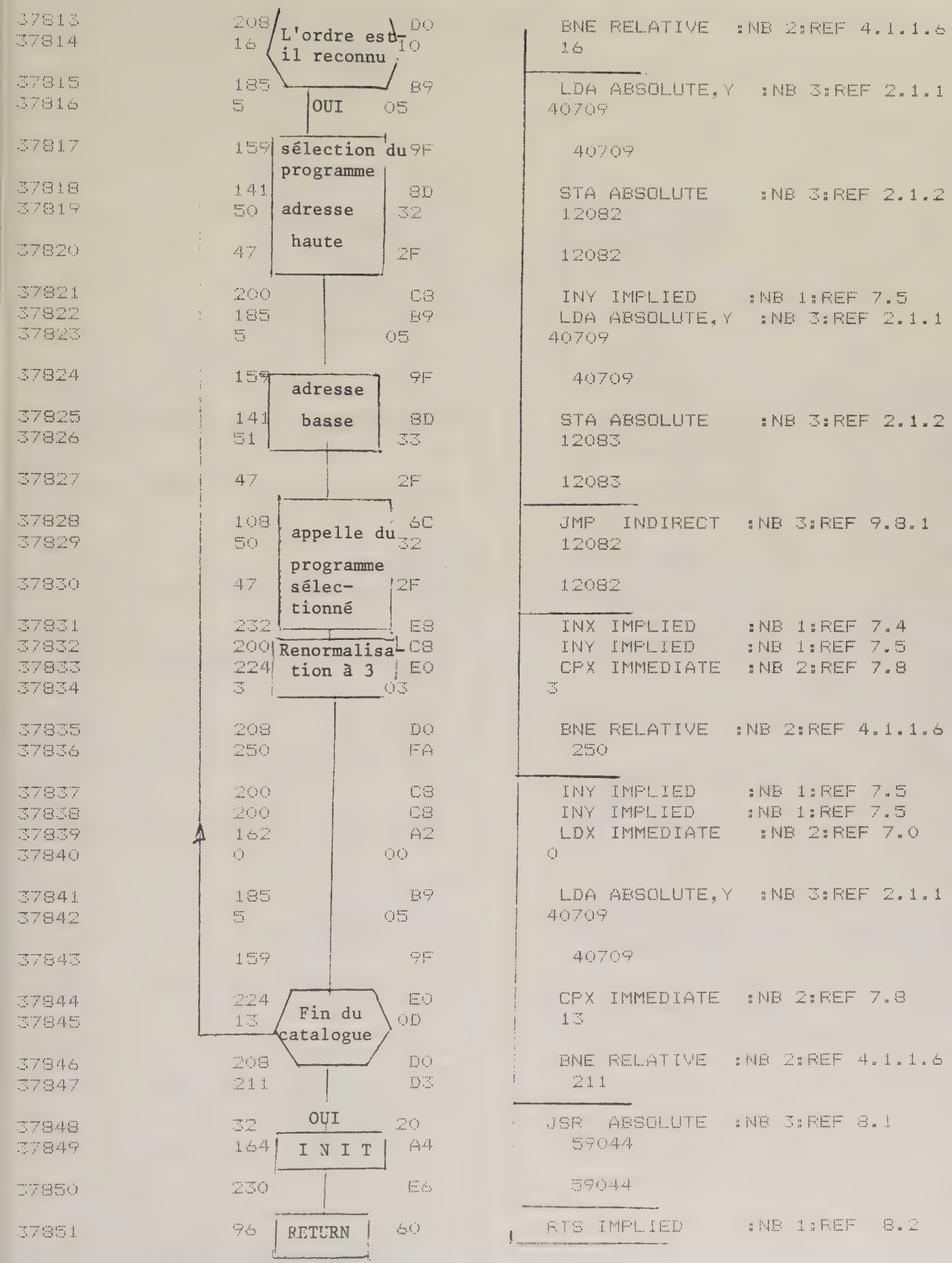


Fig. 10 : Programme ESD (feuille 1)

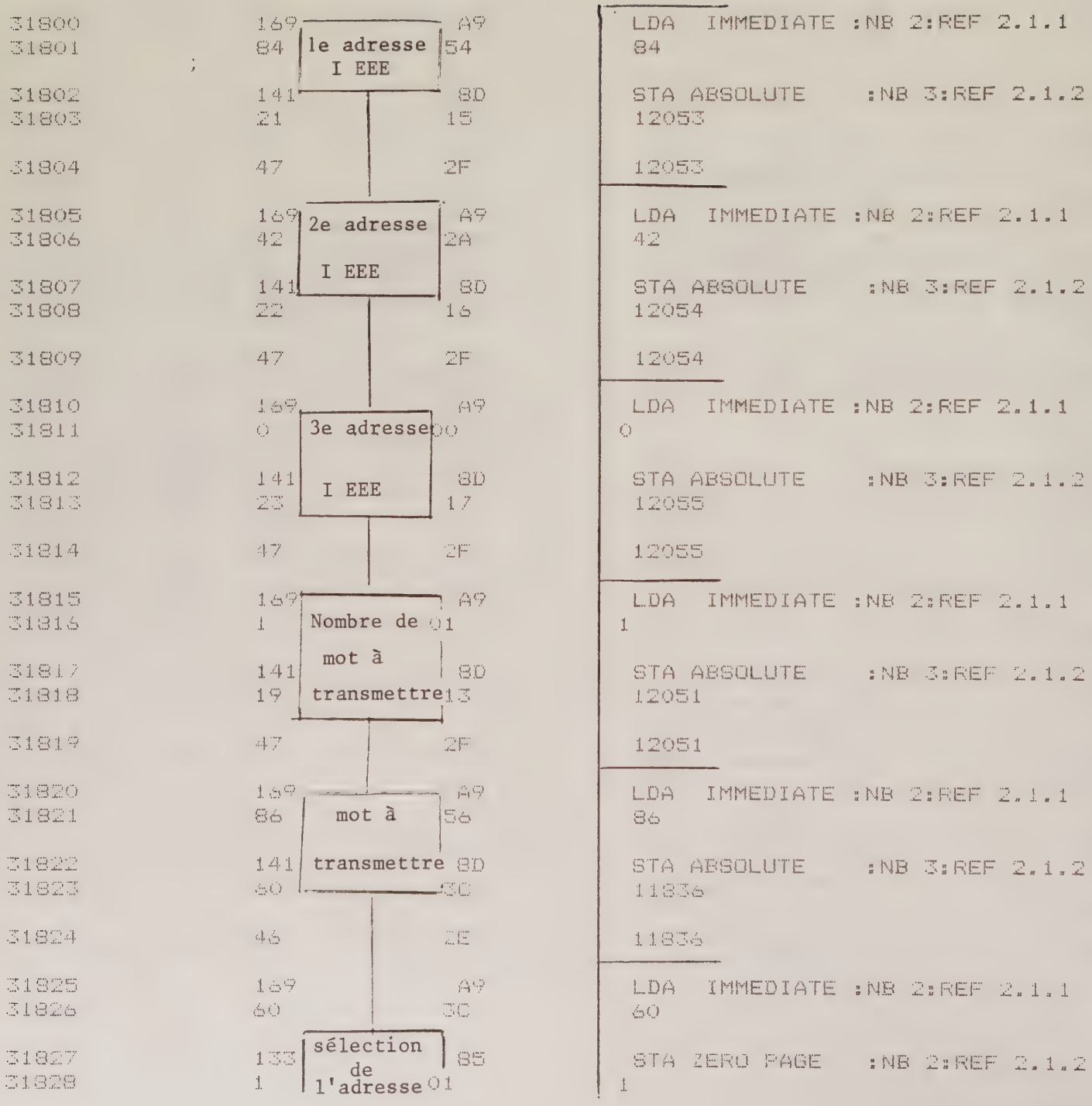


Fig. 10 : Programme ESD (feuille n°2)

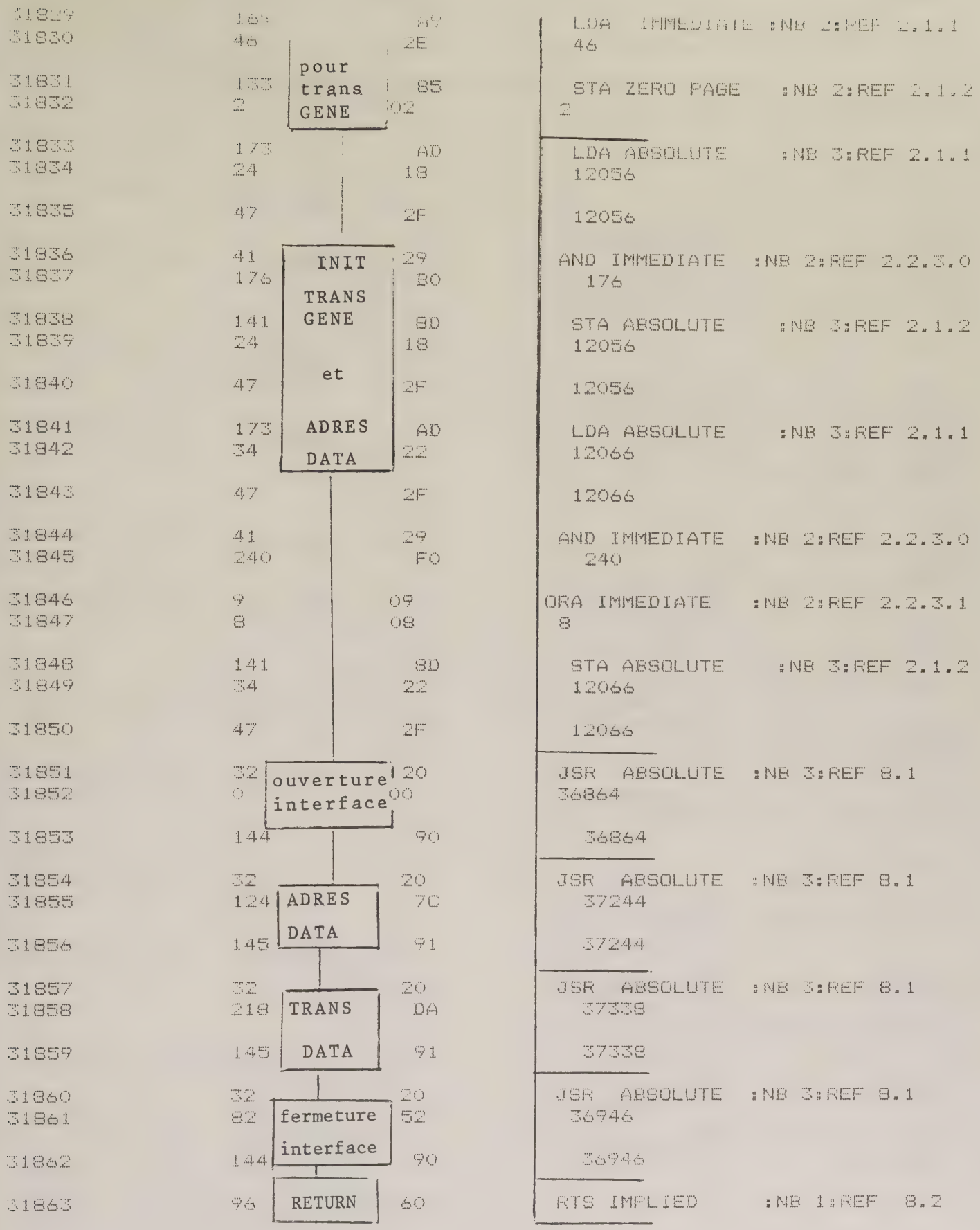


Fig. 10 : Programme commande Transfo. (feuille n°3)

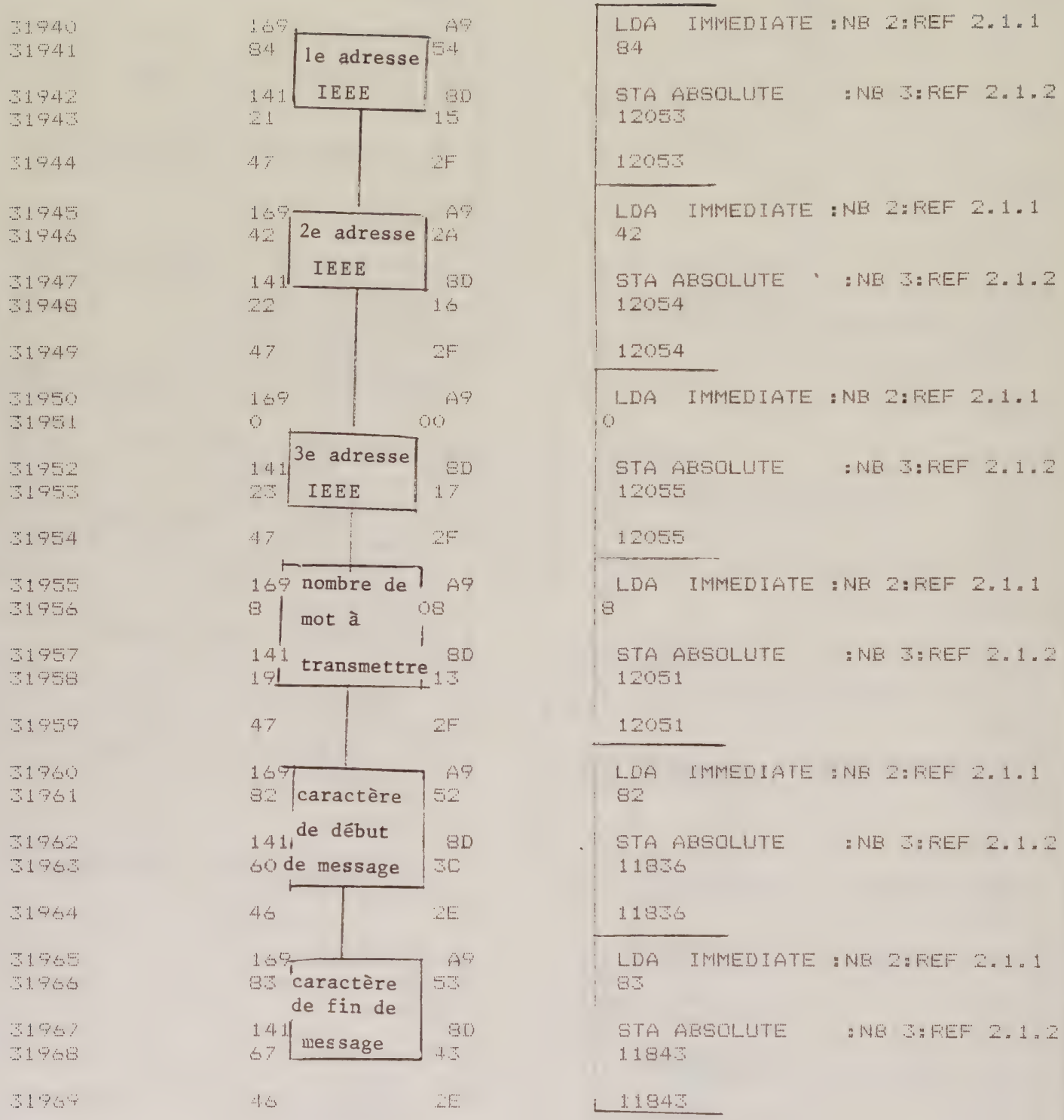


Fig. 10 : Programme Commande Transfo. (feuille n°4)

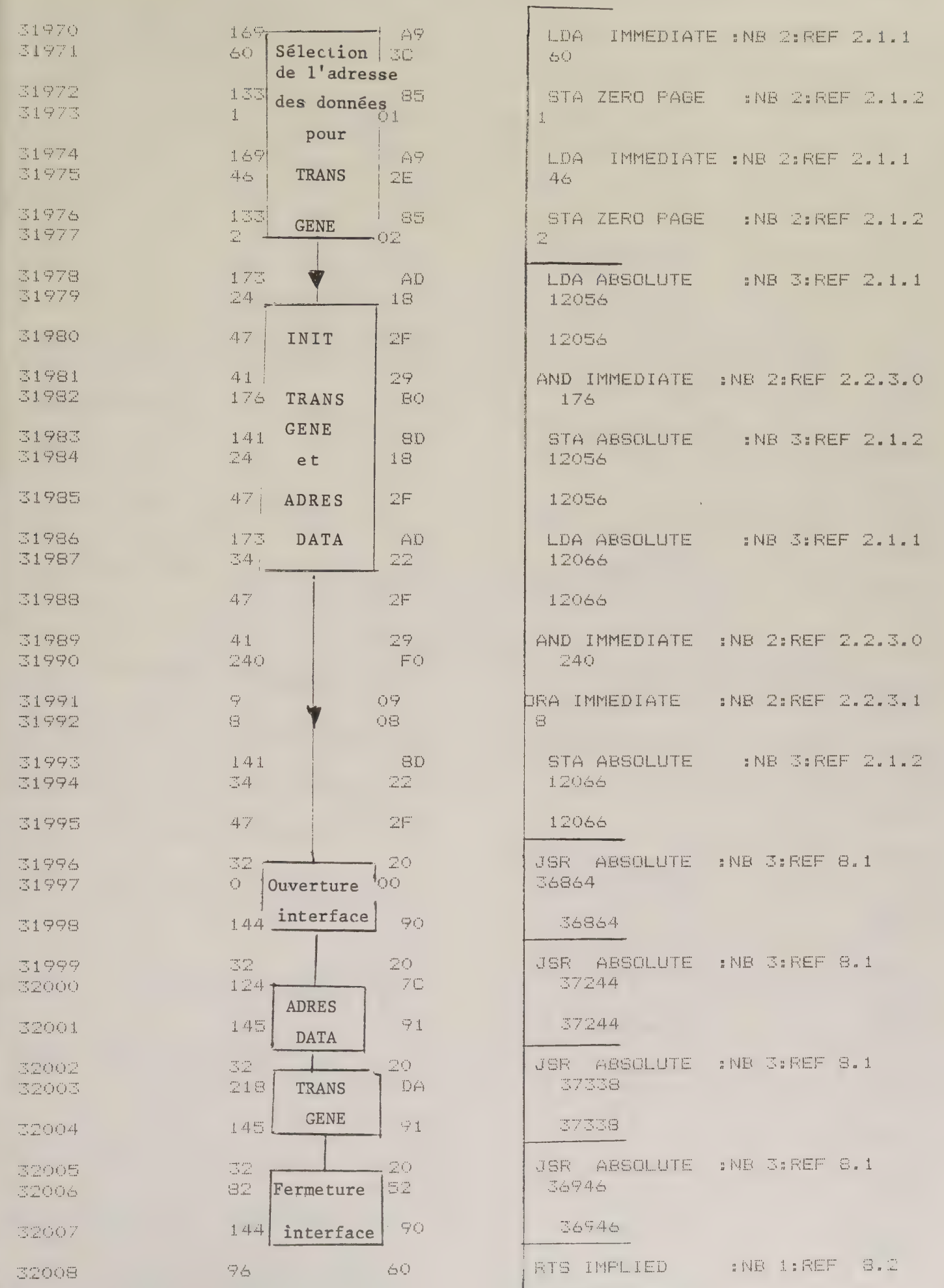


Fig. 10 : Programme A D (feuille n°5)

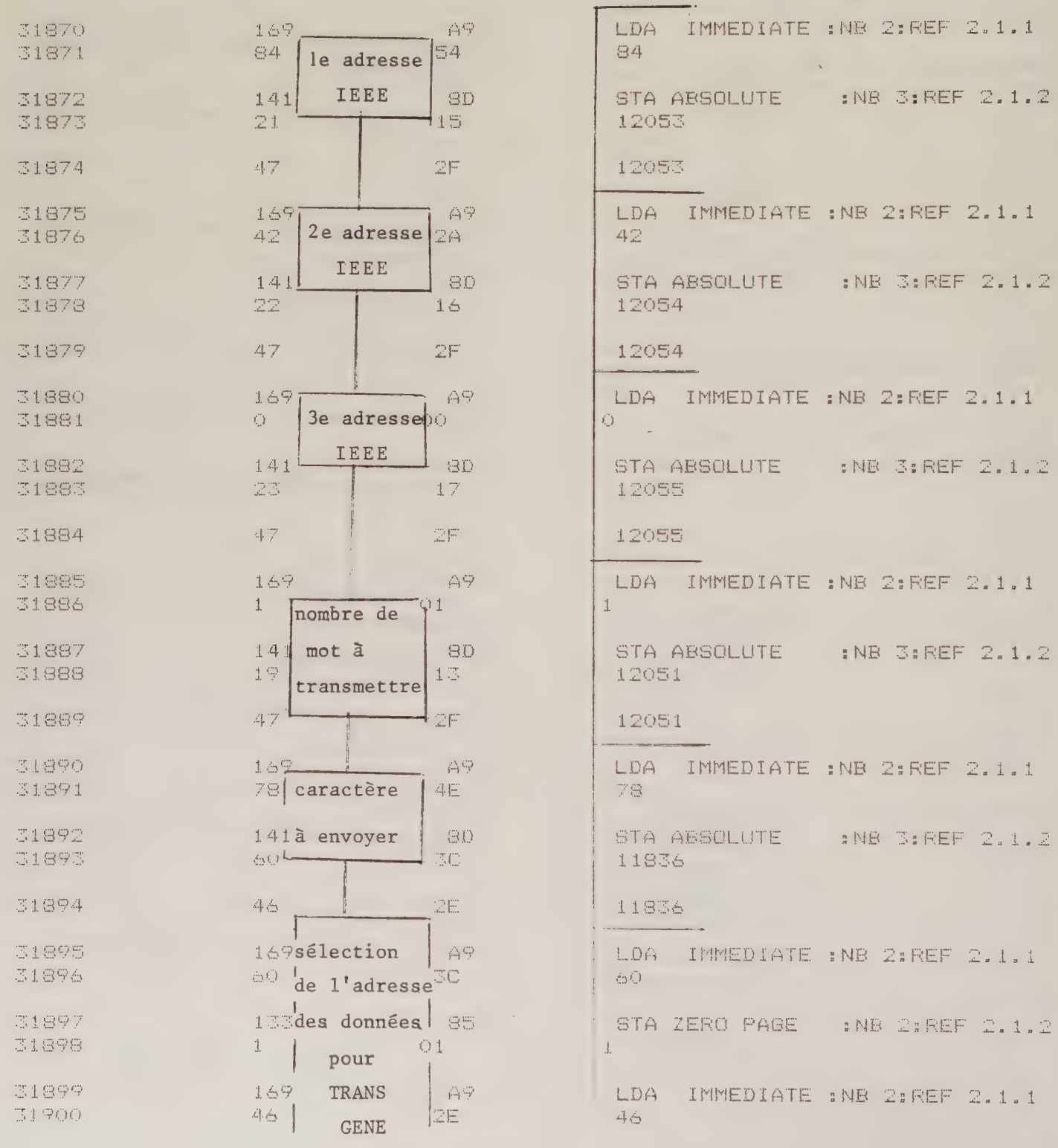
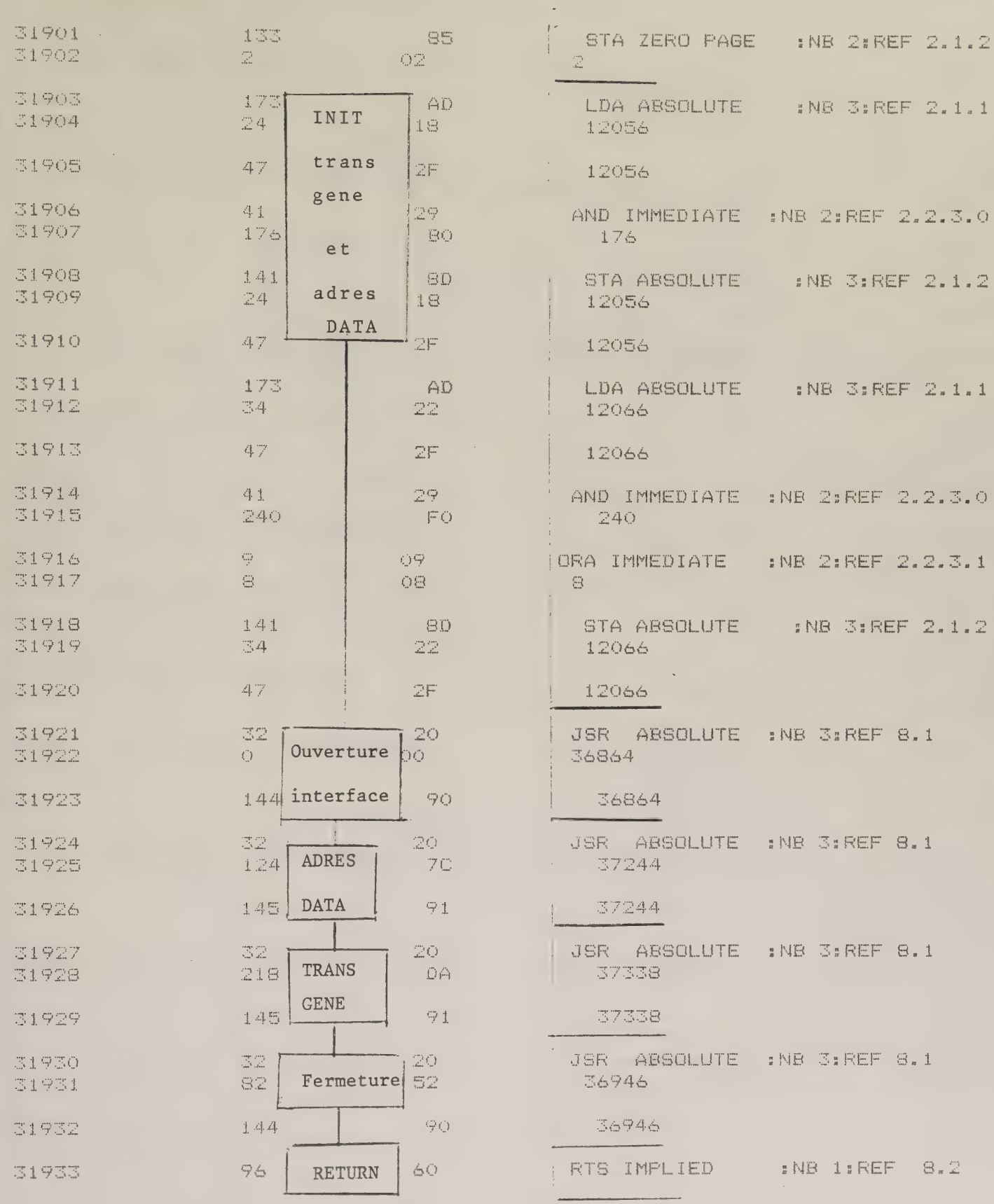
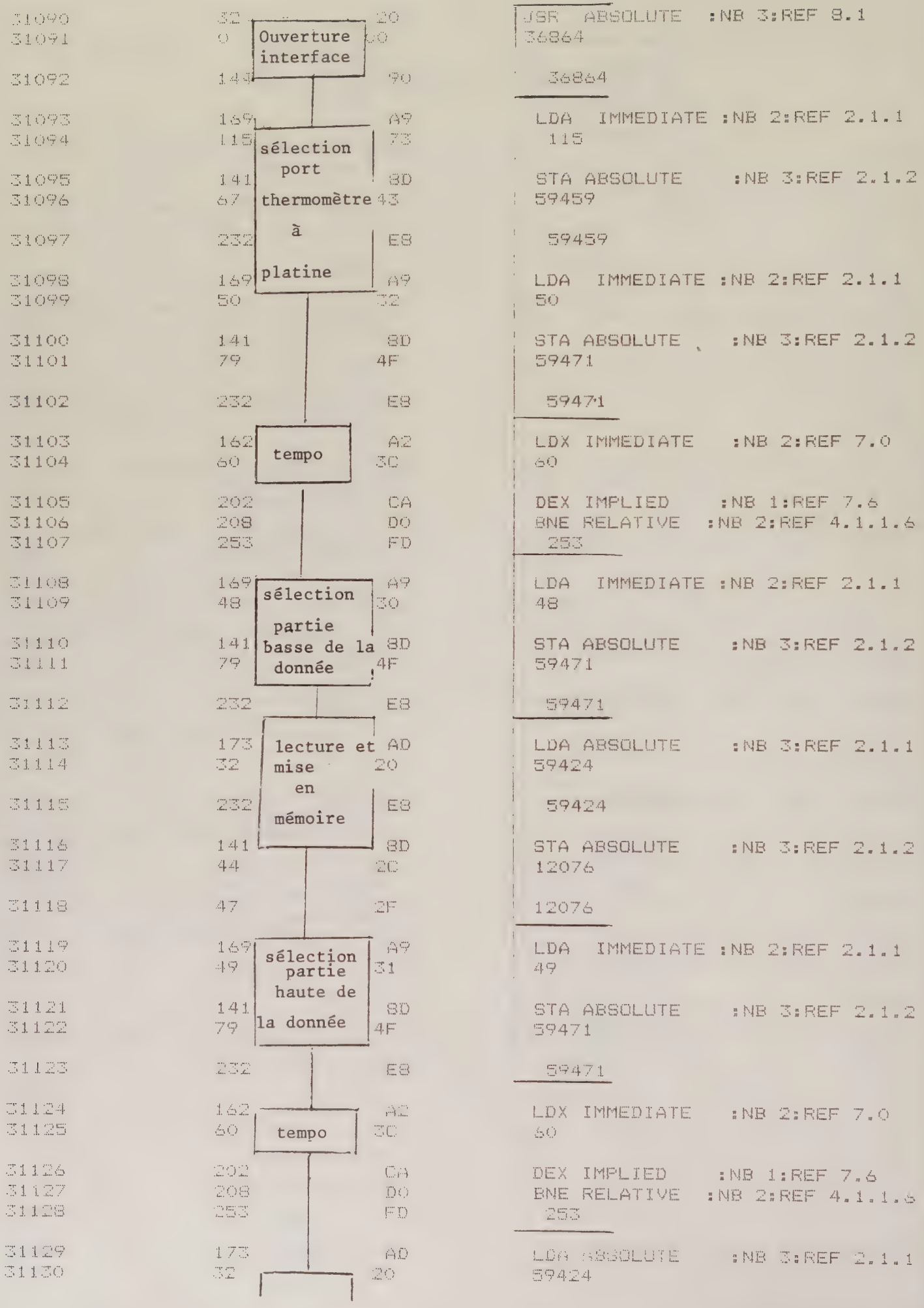


Fig. 10 ; Programme AD (feuille 6 et fin)




```
31901   133    85    STA ZERO PAGE    :NB 2:REF 2.1.2
31902   2      02    2
31903   173    AD    LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
31904   24     18    12056
31905   47     2F    12056
31906   41     29    AND IMMEDIATE    :NB 2:REF 2.2.3.0
31907   176    B0    176
31908   141    8D    STA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.2
31909   24     18    12056
31910   47     2F    12056
31911   173    AD    LDA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.1
31912   34     22    12066
31913   47     2F    12066
31914   41     29    AND IMMEDIATE    :NB 2:REF 2.2.3.0
31915   240    F0    240
31916   9      09    ORA IMMEDIATE    :NB 2:REF 2.2.3.1
31917   8      08    8
31918   141    8D    STA ABSOLUTE     :NB 3:REF 2.1.2
31919   34     22    12066
31920   47     2F    12066
31921   32     20    JSR  ABSOLUTE    :NB 3:REF 8.1
31922   0      00    36864
31923   144    90    36864
31924   32     20    JSR  ABSOLUTE    :NB 3:REF 8.1
31925   124    7C    37244
31926   145    91    37244
31927   32     20    JSR  ABSOLUTE    :NB 3:REF 8.1
31928   218    DA    37338
31929   145    91    37338
31930   32     20    JSR  ABSOLUTE    :NB 3:REF 8.1
31931   82     52    36946
31932   144    90    36946
31933   96     60    RTS IMPLIED      :NB 1:REF  8.2
```

Fig. 11 : Programme PLM




```
31090   32   20    JSR  ABSOLUTE   :NB 3:REF 8.1
31091    0   LO    36864
31092  144   90     36864
31093  169   A9    LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
31094  115   73     115
31095  141   8D    STA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.2
31096   67   43    59459
31097  232   E8     59459
31098  169   A9    LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
31099   50   32    50
31100  141   8D    STA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.2
31101   79   4F    59471
31102  232   E8     59471
31103  162   A2    LDX IMMEDIATE   :NB 2:REF 7.0
31104   60   3C    60
31105  202   CA    DEX IMPLIED     :NB 1:REF 7.6
31106  208   D0    BNE RELATIVE    :NB 2:REF 4.1.1.6
31107  253   FD     253
31108  169   A9    LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
31109   48   30    48
31110  141   8D    STA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.2
31111   79   4F    59471
31112  232   E8     59471
31113  173   AD    LDA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.1
31114   32   20    59424
31115  232   E8     59424
31116  141   8D    STA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.2
31117   44   2C    12076
31118   47   2F    12076
31119  169   A9    LDA  IMMEDIATE :NB 2:REF 2.1.1
31120   49   31    49
31121  141   8D    STA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.2
31122   79   4F    59471
31123  232   E8     59471
31124  162   A2    LDX IMMEDIATE   :NB 2:REF 7.0
31125   60   3C    60
31126  202   CA    DEX IMPLIED     :NB 1:REF 7.6
31127  208   D0    BNE RELATIVE    :NB 2:REF 4.1.1.6
31128  253   FD     253
31129  173   AD    LDA ABSOLUTE    :NB 3:REF 2.1.1
31130   32   20    59424
```

Fig. 11 : Programme PLM

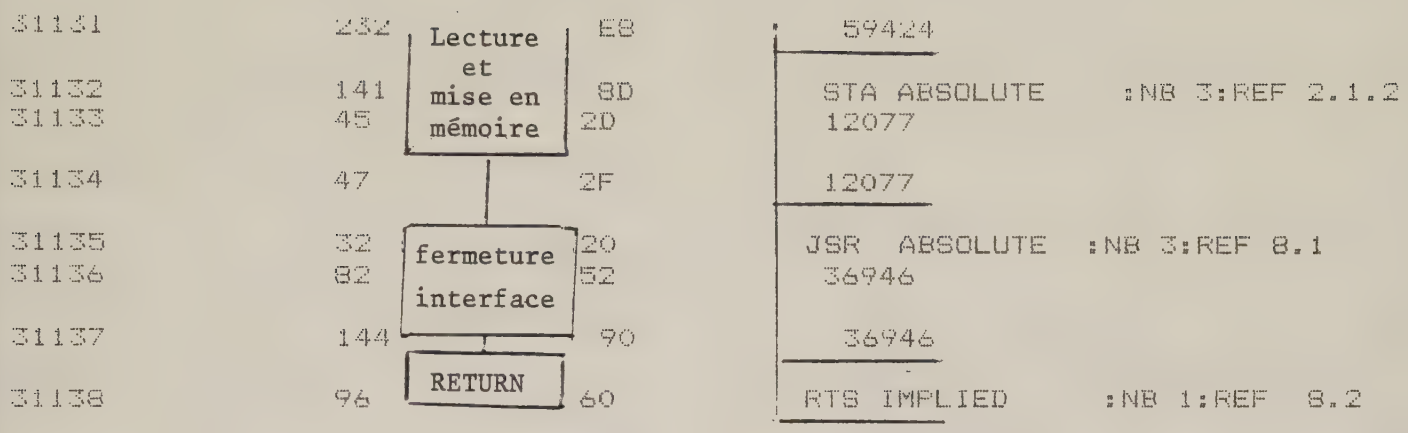


Fig. 12 Programme Open (feuille 1)

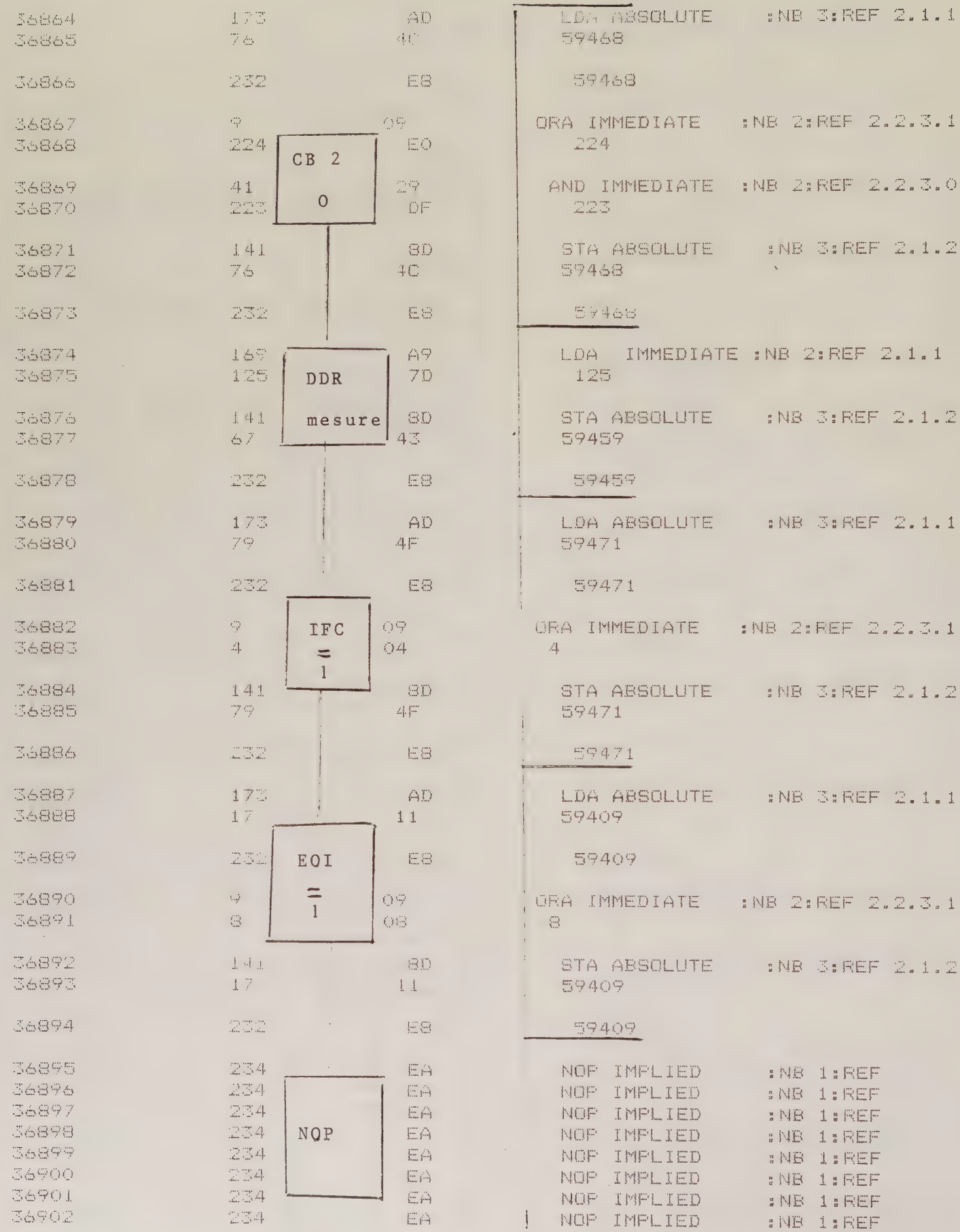


Fig. 12 : Programme OPEN (feuille 2)

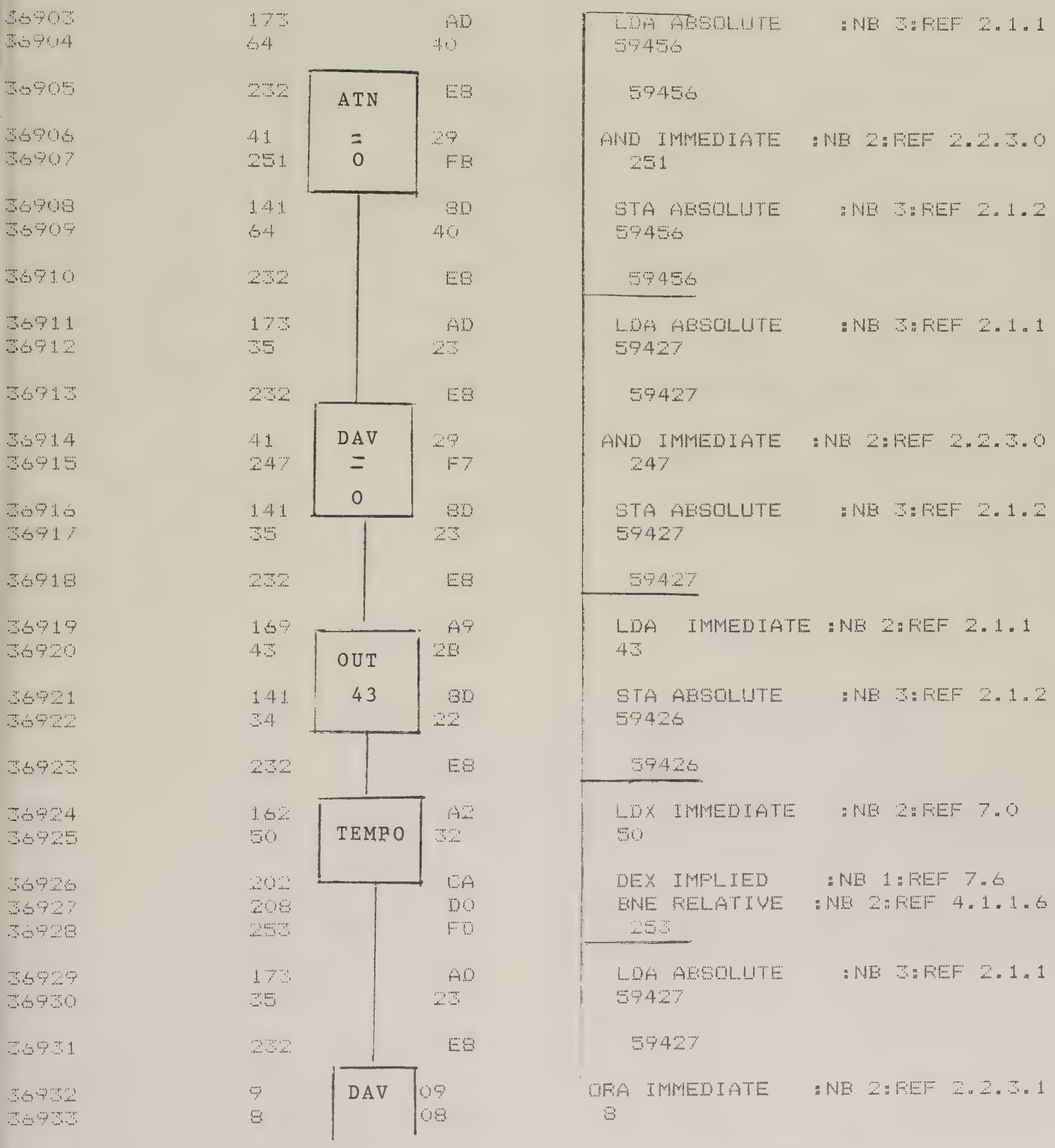


Fig. 12 : Programme OPEN (feuille n°3 -fin)

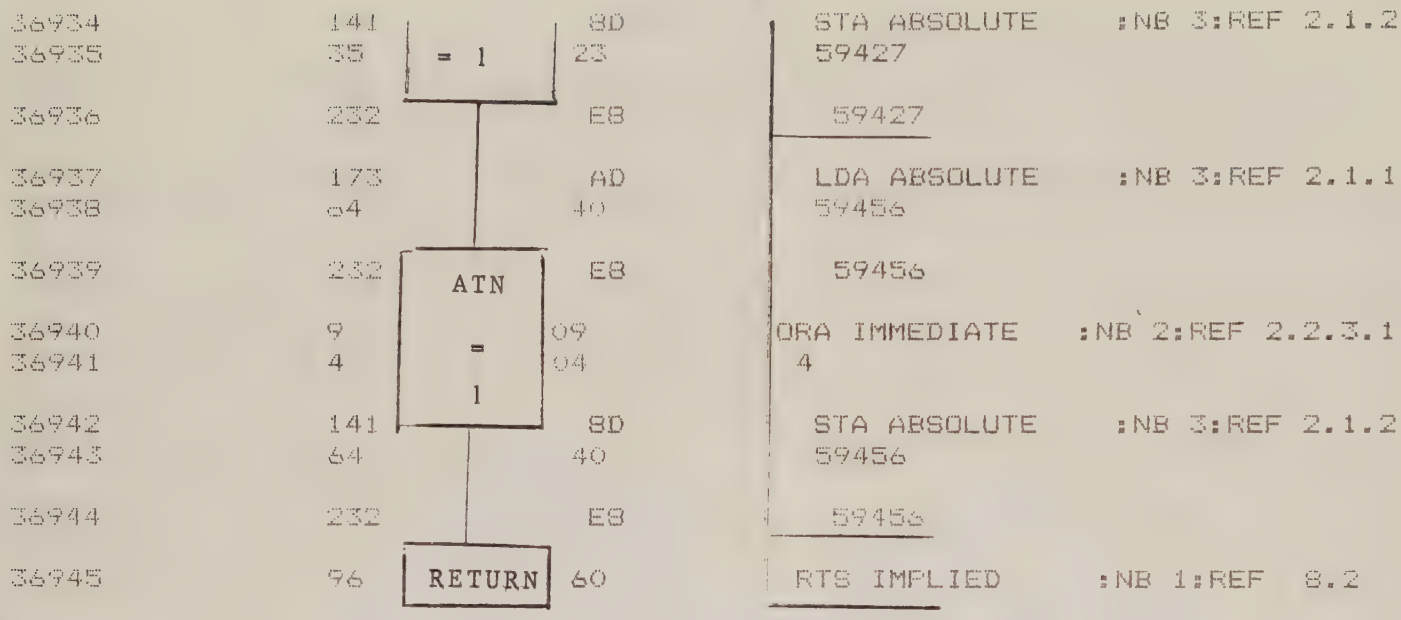


Fig. 13 ; Programme CLOSE (feuille 1)

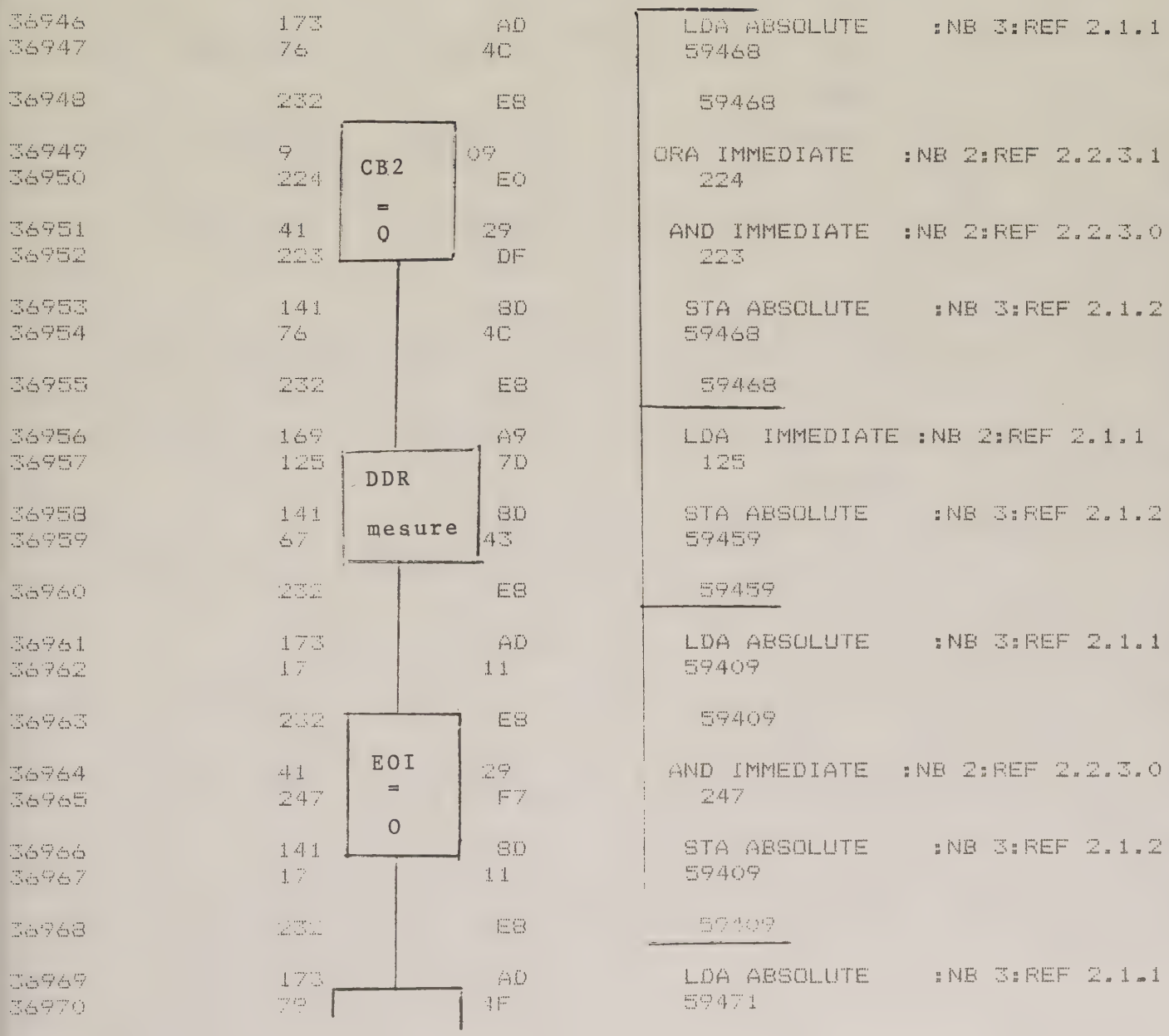
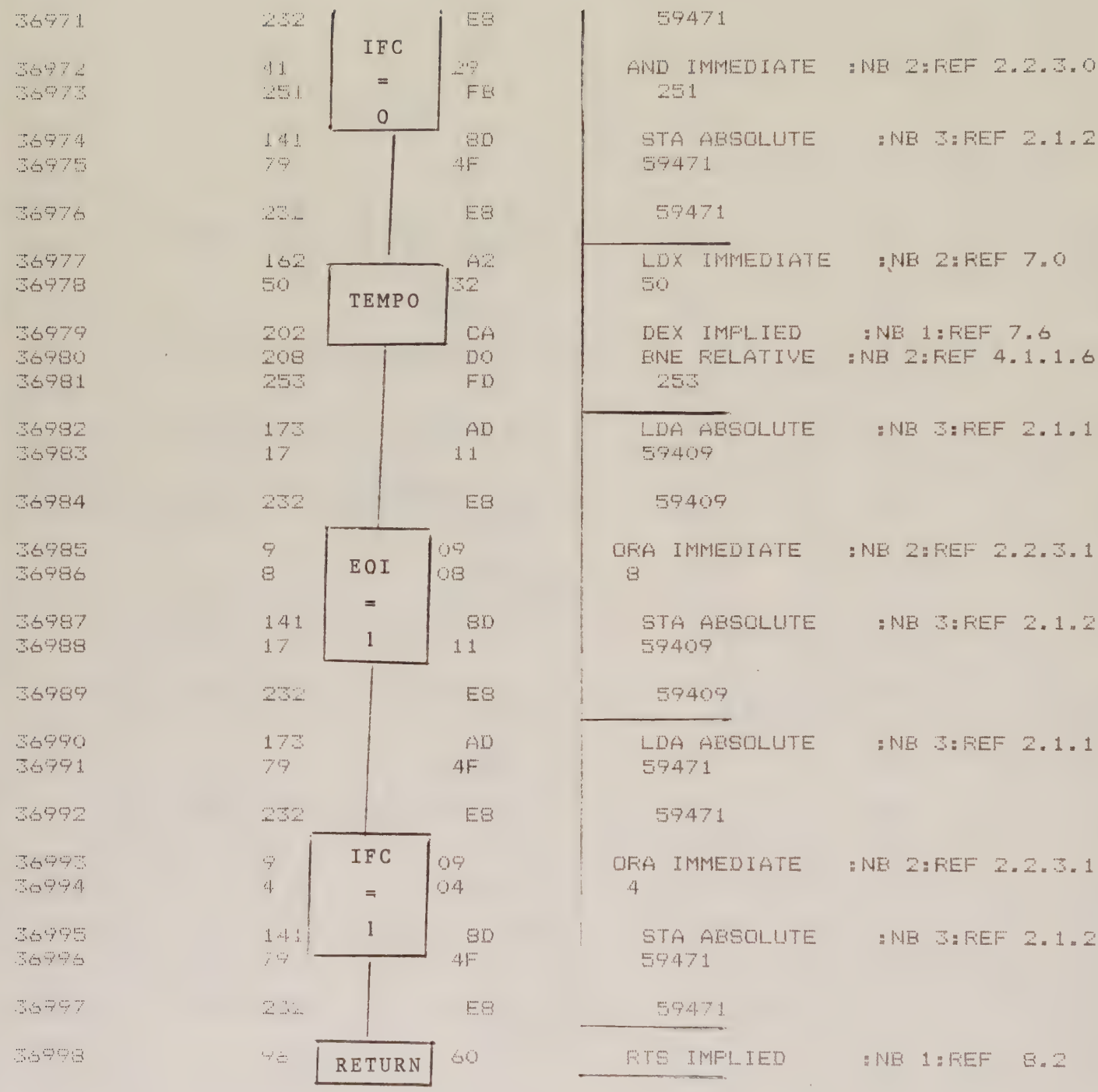


Fig. 13 : Programme CLOSE (feuille 2 et fin)




```
36971  232  E8      59471
36972  41   29      AND IMMEDIATE  :NB 2:REF 2.2.3.0
36973  251  FB      251
36974  141  8D      STA ABSOLUTE   :NB 3:REF 2.1.2
36975  79   4F      59471
36976  232  E8      59471
36977  162  A2      LDX IMMEDIATE  :NB 2:REF 7.0
36978  50   32      50
36979  202  CA      DEX IMPLIED    :NB 1:REF 7.6
36980  208  D0      BNE RELATIVE   :NB 2:REF 4.1.1.6
36981  253  FD      253
36982  173  AD      LDA ABSOLUTE   :NB 3:REF 2.1.1
36983  17   11      59409
36984  232  E8      59409
36985  9    09      ORA IMMEDIATE  :NB 2:REF 2.2.3.1
36986  8    08      8
36987  141  8D      STA ABSOLUTE   :NB 3:REF 2.1.2
36988  17   11      59409
36989  232  E8      59409
36990  173  AD      LDA ABSOLUTE   :NB 3:REF 2.1.1
36991  79   4F      59471
36992  232  E8      59471
36993  9    09      ORA IMMEDIATE  :NB 2:REF 2.2.3.1
36994  4    04      4
36995  141  8D      STA ABSOLUTE   :NB 3:REF 2.1.2
36996  79   4F      59471
36997  232  E8      59471
36998  96   60      RTS IMPLIED    :NB 1:REF  8.2
```

RESUME

L'étude de la propagation des ondes ultra-sonores dans l'hélium 3 superfluide en phase B a révélé l'existence de phénomènes non-linéaires lors du couplage du son zéro au mode de vibration du paramètre d'ordre appelé le mode de "real squashing". En août 1981, un modèle théorique décrivant ces phénomènes a été proposé par J. Sauls. Le but de ce travail est d'en vérifier la validité. Ceci fut fait en deux étapes :

1) Calculs analytiques et numériques.
   L'étude numérique du modèle a été menée en détail dans des conditions proches de celles rencontrées expérimentalement.
2) Comparaison avec les résultats expérimentaux
   Après avoir passé en revue les résultats expérimentaux disponibles, je conclus qu'il n'est pas possible d'en rendre compte en mettant en jeu des solitons et que, par conséquent, le modèle phnéoménologique proposé n'est pas valable. Donc, la théorie exacte du comportement non-linéaire de la propagation du son dans l'^{3}He-B est encore à construire. Les observations expérimentales existantes ne fournissent qu'une quantité d'informations limitée et insuffisante pour jeter sans ambiguité les bases d'une théorie satisfaisante.

Cette thèse comprend quatre chapitres et cinq annexes :

1) le premier chapitre consiste en une introduction aux problèmes non-linéaires,
2) les deux chapitres suivants traitent des deux points mentionnés ci-dessus,
3) le dernier décrit le montage d'un pont d'inductance automatique pour un thermomètre à sel paramagnétique dilué (LCMN) et constitue la contribution de ce travail au dispositif expérimental.

Les annexes convrent les sujets suivants :

1) Le modèle de Sauls ne dérive pas d'un formalisme lagrangien,
2) Calcul des vitesses de phase dans les divers cas linéaires,
3) Description de l'algorithme utilisé pour l'intégration numérique du système d'équations différentielles non-linéaires,
4) Description de l'interfaçage du pont automatique,
5) Listage des micro-programmes utilisés.